Apéndice 2
Ondas viajeras en una cuerda tensa.

1 Deducción de la ecuación diferencial de onda.

Consideremos una cuerda uniforme muy larga de densidad lineal de masa μ,

sometida a una tensión T. Supongamos que por ella se propaga una onda viajera que sólo le produce pequeños apartamientos del equilibrio. Representamos la forma de la cuerda mediante la función $y(x,t)$ donde se admite que la misma varía con el tiempo. Sea Δm la masa de un elemento testigo perteneciente a la cuerda (Ver figura 1). situado entre las posiciones x y $x+\Delta x$. Entonces tenemos que $\Delta m = \mu \Delta x$.

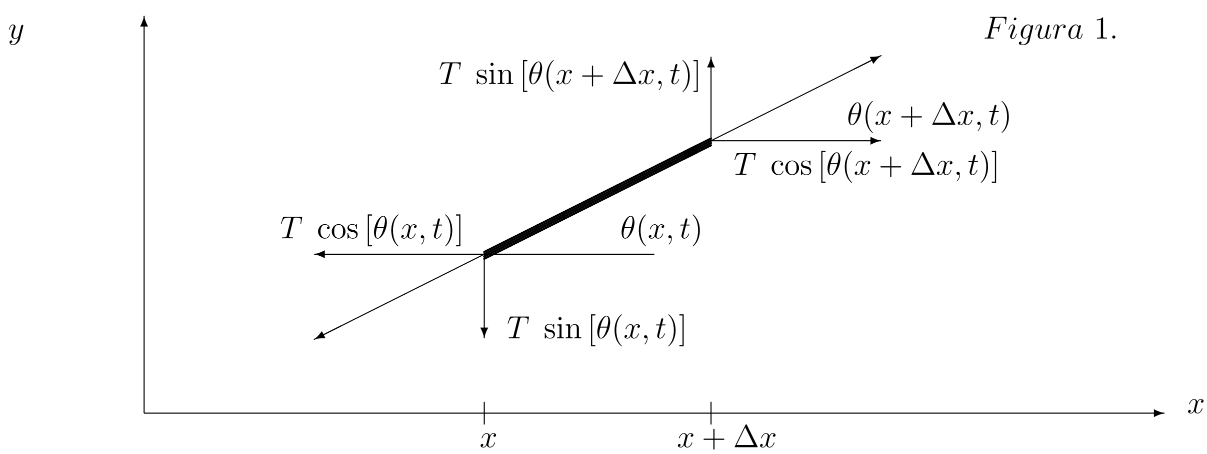


Figura 1.

La fuerza que los elementos vecinos ejercen sobre el elemento testigo tendrá módulo T y dirección tangente a la cuerda en x y en $x+\Delta x$. Aplicando la segunda ley de Newton tenemos

$$T\cos[\,\theta(x+\Delta x,t)] - T\cos[\,\theta(x,t)] = 0 \tag{1}$$

$$T\sin[\,\theta(x+\Delta x,t)] - T\sin[\,\theta(x,t)] = \Delta m\, a_y(x,t) \tag{2}$$

onde $\theta(x)$ y $\theta(x+\Delta x)$ representan los ángulos que forman las tangentes a la cuerda en los extremos del elemento testigo. Por su parte, $a_y(x,t)$ es la componente de la aceleración en dirección perpendicular a la cuerda. La condición de pequeños desplazamientos puede restringirse aún más imponiendo que los ángulos θ también sean muy pequeños. Con esto tenemos que

$$\theta << 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta \;\cong\; tg\theta \;\cong\; \theta \\ \cos\theta \cong 1 \end{cases} \tag{3}$$

Reemplazando

$$T\ tg\,[\,\theta(x+\Delta x,t)] - T\ tg\,[\,\theta(x,t)] = \mu\Delta x\ a_y \tag{4}$$

$$\frac{tg\,[\,\theta(x+\Delta x,t)] - tg\,[\,\theta(x,t)]}{\Delta x} = \frac{\mu}{T}\ a_y(x,t) \tag{5}$$

Haciendo el límite para Δx tendiendo a cero, el primer miembro toma el aspecto de una derivada por definición. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\ tg\,[\,\theta(x,t)] = \frac{\mu}{T}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ y(x,t) \tag{6}$$

Por otra parte recordemos que, en un instante, $\partial y/\partial x$ representa la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva con el eje positivo de las x. Esto es

$$tg\,[\,\theta(x,t)] = \frac{\partial}{\partial x}\ y(x,t) \tag{7}$$

Entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ y(x,t) = \frac{\mu}{T}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ y(x,t) \tag{8}$$

2 La ecuación diferencial de onda y sus soluciones

La ecuación diferencial obtenida describe la dinámica de la onda en la cuerda. En lo sucesivo, omitiremos las dependencias x y t que deben sobreentenderse. Además introducimos la constante v, definida como

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \tag{9}$$

Luego veremos que tal constante debe ser interpretada como la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. Con estas notaciones, la ecuación diferencial se escribe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ =\ \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{10}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales. A continuación veremos que funciones de la forma

$$y(x,t) = f(x - vt) \tag{11}$$

son soluciones de la misma. Para ello calculamos las derivadas y las reemplazamos. Sea $u = x - vt$. Entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial t} = -v\,\frac{\partial y}{\partial u} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-v\,\frac{\partial y}{\partial u}\right] = -v\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \tag{15}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial llegamos a una identidad, por lo que asumimos que la función propuesta es solución. Habríamos llegado a la misma conclusión si la función propuesta hubiera sido

$$y(x,t) = f(x + vt) \tag{16}$$

3 Interpretación física de las soluciones.

Ahora buscaremos interpretar físicamente las soluciones del tipo (11). Aquí nos valemos nuevamente de la variable $u = x - vt$. En tal sentido, observemos que, cualquiera sea la forma explícita de la función f, la coordenada transversal y tomará un mismo valor para todos los pares (x,t) asociados con un mismo valor de u. Para comprender esta idea, observemos la tabla siguiente

$$\begin{array}{llll}
x = x_0 & t = t_0 & u_0 = x_0 - vt_0 & y_0(x_0,t_0) = f(x_0 - vt_0) = f(u_0) \\
x = x_1 & t = t_1 & u_0 = x_1 - vt_1 & y_1(x_1,t_1) = f(x_1 - vt_1) = f(u_0) \\
x = x_2 & t = t_2 & u_0 = x_2 - vt_2 & y_2(x_2,t_2) = f(x_2 - vt_2) = f(u_0)
\end{array}$$

Aquí hemos elegido tres pares (x,t) que todos corresponden a un mismo valor de u, y concluimos que

$$y_0 = y_1 = y_2$$

En la figura 2, mostramos una función f para los tres tiempos utilizados, y proponemos centrar la atención en el segundo máximo de la función. Observe que la tabla anterior es compatible con los tres dibujos. Considerando que para todos los puntos vale la misma idea que para el segundo máximo, podemos identificar la solución como una perturbación que se propaga hacia la derecha con velocidad v.

Si en lugar de considerar la solución (11) hubieramos considerado la solución (16), hubieramos concluido que la onda viajaba hacia la izquierda con velocidad v. Recordando que el módulo de la velocidad viene dado por (9), podemos concluir que las ondas viajarán más rápidamente por la cuerda, cuando la misma sea muy liviana o se encuentre muy tensa. Nótese que la densidad lineal de masa μ es una propiedad intrínseca de la cuerda, y la tensión depende del montaje. Por lo tanto la velocidad no depende del tipo de perturbación que viaje por la cuerda. Con el fin de compactar la notación, a veces se escribe la forma general de las soluciones como

$$y(x,t) = f(x \pm vt) \tag{17}$$

donde debe elegirse el signo $+$ si la onda viaja hacia la izquierda, y el signo $-$ si viaja hacia la derecha.

4 Soluciones armónicas.

Una forma de solución muy estudiada es la solución armónica dada por

$$y(x,t) = A \sin\left[k(x - vt) + \phi\right] \tag{18}$$

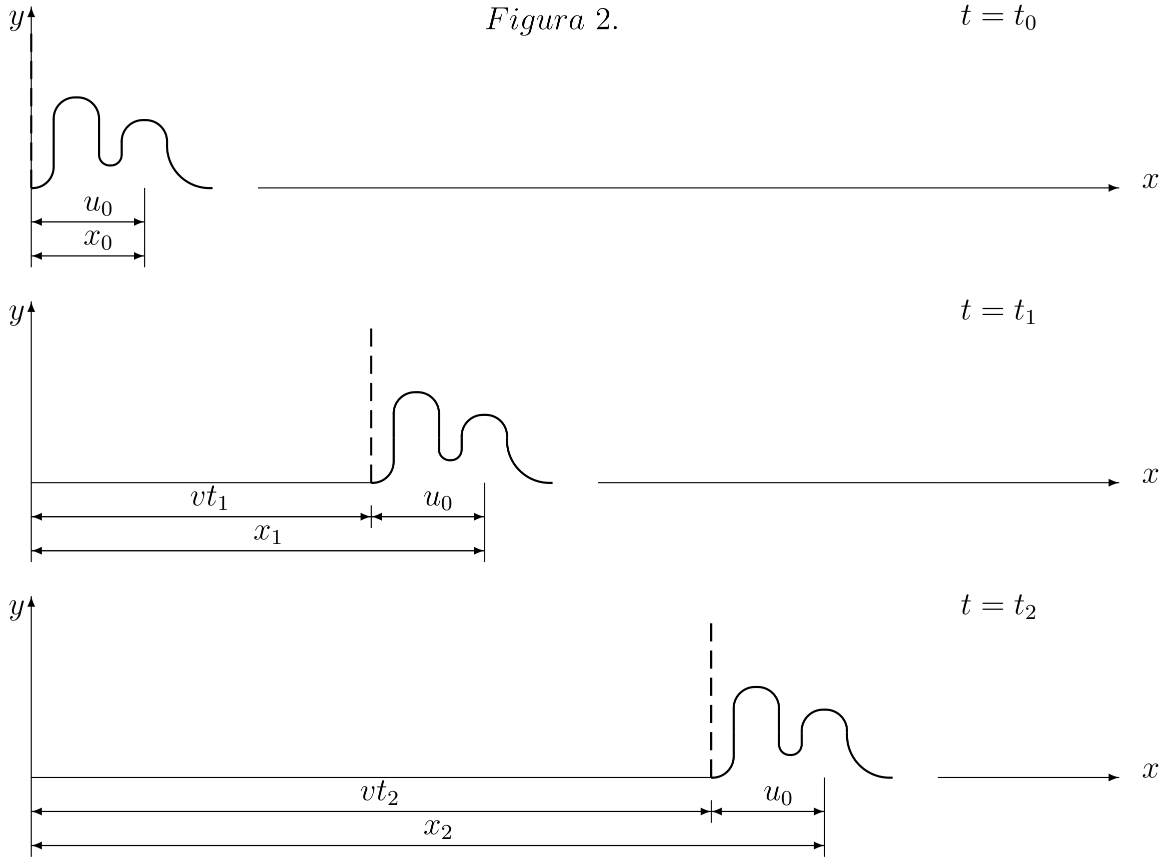
donde A es la amplitud, k el número de onda y ϕ la fase inicial (todas ellas constantes). En esta clase de soluciones se definen la longitud de onda λ, la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el período T como sigue

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = kv = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{19}$$

Otra forma habitual para la descripción de una onda armónica es

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{20}$$

Figura 2.



5 Linealidad y superposición de ondas armónicas.

La ecuación diferencial que describe la dinámica de una onda es lineal. Esto significa que si dos funciones son soluciones de dicha ecuación diferencial, su suma también será solución. A continuación centraremos nuestra atención en algunos fenómenos que pueden caracterizarse como la superposición de dos ondas armónicas. Nos referiremos por sencillez a ondas en una cuerda, pero la fenomenología puede observarse en todo tipo de ondas que respondan a la misma clase de ecuación diferencial.

6 Interferencia.

La palabra interferencia suele usarse en sentido genérico para denominar a cualquier fenómeno de superposición de ondas. Sin embargo, también es se utiliza la misma denominación en sentido más restrictivo, para denotar el fenómeno en que dos ondas armónicas de igual frecuencia se superponen viajando en la misma dirección y en el mismo sentido. Para analizar esta situación, consideremos una cuerda tensa por la que se propagan dos ondas dadas por

$$y_1(x,t) = A_1 \cos\left[\, k(x - vt) + \phi_1 \,\right] \tag{21}$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos\left[\, k(x - vt) + \phi_2 \,\right] \tag{22}$$

donde las amplitudes y las fases relativas sean arbitrariamente elegidas. Un resultado proveniente de la trigonometría nos enseña que la suma de dos funciones armónicas de igual período también armónica de igual período. Siguiendo esta idea, proponemos que la suma de las dos ondas anteriores sea

$$y(x,t) = A \cos\left[\, k(x - vt) + \phi \,\right] \tag{23}$$

donde la amplitud A y la fase ϕ son constantes a determinar. Para simplificar la deducción definimos

$$u = k(x - v\ t) \tag{24}$$

Entonces tenemos

$$A \cos\left[\, u + \phi \,\right] = A_1 \cos\left[\, u + \phi_1 \,\right] + A_2 \cos\left[\, u + \phi_2 \,\right] \tag{25}$$

Desarrollando los cosenos tenemos

$$\begin{aligned} A\cos(u)\cos(\phi) - A\sin(u)\sin(\phi) = \\ = A_1\cos(u)\cos(\phi_1) - A_1\sin(u)\sin(\phi_1) + A_2\cos(u)\cos(\phi_2) - A_2\sin(u)\sin(\phi_2) \\ [\, A\cos(\phi)\,]\cos(u) - [A\sin(\phi)]\sin(u) = \\ = [\, A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)\,]\cos(u) - [\, A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)\,]\sin(u) \end{aligned}$$

Como la igualdad debe cumplirse para todo u (esto es, para todo x y para todo t), los coeficientes que acompañan a $\cos(u)$ y $\sin(u)$ deben ser iguales en ambos miembros. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} A\cos(\phi) = A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2) \\ A\sin(\phi) = A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2) \end{array} \right. \tag{26}$$

Haciendo el cociente miembro a miembro, tenemos

$$tg(\phi) = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)} \tag{27}$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las relaciones (26) tenemos

$$A^2 = [\, A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)\,]^2 + [\, A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)\,]^2 \tag{28}$$

De esta manera podemos determinar la amplitud A y la fase ϕ de la onda resultante a partir de las amplitudes A_1 y A_2, y de las fases ϕ_1 y ϕ_2 de las ondas que se superponen.

Analizamos ahora algunas situaciones particulares. Consideremos el caso en que las ondas que interfieren tienen la misma fase ($\phi_1 = \phi_2$). Las expresiones (28) y (**??**) conducen a

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 \qquad A = A_1 + A_2 \tag{29}$$

Esta situación se conoce como interferencia constructiva, y puede interpretarse como que las dos ondas se "refuerzan" al propagarse simultáneamente. Analizamos ahora el caso en que las fases difieren en π ($\phi_2 - \phi_1 = \pi$). En este caso tenemos

$$\phi = \begin{cases} \phi_1 & si \;\; A_1 > A_2 \\ \phi_2 & si \;\; A_2 > A_1 \end{cases} \qquad A = |\, A_1 - A_2\, | \tag{30}$$

Este caso se denomina interferencia destructiva, y puede interprestarse como un "debilitamiento" originado en la superposición de ondas. Observe que si las amplitudes A_1 y A_2 son iguales, la onda resultante es nula (¿?).

7 Batido.

El fenómeno de batido ocurre cuando dos ondas armónicas con números de onda k_1 y K_2 parecidos (pero no iguales), se propagan en la misma dirección y sentido. La forma más simple de modelar el batido consiste en sumar dos ondas armónicas con igual amplitud[1]. Consideremos las ondas armónicas dadas por

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \;\cos[\, k_1(x - vt)\,] \\ y_2(x,t) &= A \;\cos[\, k_2(x - vt)\,] \end{aligned} \tag{31}$$

donde k_1 y k_2 tienen valores próximos. por simplicidad introducimos la variable $u = x - vt$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \;\cos[\, k_1 \; u\,] \\ y_2(x,t) &= A \;\cos[\, k_2 \; u\,] \end{aligned} \tag{32}$$

[1]Que las ondas tengan igual amplitud no es requisito para que ocurra el fenómeno, sino que lo imponemos por simplicidad matemática. Con esto debe interpretarse que el batido se da aún cuando las amplitudes son distintas, pero su tratamiento matemático es más complicado.

Ahora introducimos las siguientes definiciones

$$k_+ = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad y \qquad k_- = \frac{k_1 - k_2}{2} \tag{33}$$

de donde obtenemos que

$$k_1 = k_+ + k_- \qquad y \qquad k_2 = k_+ - k_- \tag{34}$$

Reemplazando en (32) tenemos

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \ \cos\left[\, (k_+ + k_-)\ u \,\right] \\ y_2(x,t) &= A \ \cos\left[\, (k_+ - k_-); u \,\right] \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \ \cos\left[\, k_+ \ u \,\right] \ \cos\left[\, k_- \ u \,\right] \ - A \ \sin\left[\, k_+ \ u \,\right] \ \sin\left[\, k_- \ u \,\right] \\ y_2(x,t) &= A \ \cos\left[\, k_+ \ u \,\right] \ \cos\left[\, k_- \ u \,\right] \ + A \ \sin\left[\, k_+ \ u \,\right] \ \sin\left[\, k_- \ u \,\right] \end{aligned} \tag{36}$$

Sumando ambas ondas tenemos

$$y(x,t) = 2A \ \cos\left[\, k_+ \ u \,\right] \ \cos\left[\, k_- v \ u \,\right] \tag{37}$$

Reemplazando u por su forma original, tenemos

$$y(x,t) = 2A \ \cos\left[\, k_+(x - v\ t) \,\right] \ \cos\left[\, k_-(x - v\ t) \,\right] \tag{38}$$

8 Ondas Estacionarias.

Las ondas estacionarias se forman cuando dos ondas viajeras con el mismo número de onda ($k_1 = k_2$), se propagan en una misma dirección, pero en sentidos contrarios. La forma más simple de modelar el fenómeno consiste en sumar dos ondas de igual amplitud. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \cos\left[\, k(x - v\ t) \,\right] \\ y_2(x,t) &= A \cos\left[\, k(x + v\ t) \,\right] \end{aligned} \tag{39}$$

Donde k se ha utilizado indistintamente para compactar la notación. Recordando que $\omega = kv$, y utilizando relaciones trigonométricas tenemos

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \cos(kx)\cos(\omega t) - A \sin(kx)\sin(\omega t) \\ y_2(x,t) &= A \cos(kx)\cos(\omega t) + A \sin(kx)\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{40}$$

Sumando ambas expresiones tenemos

$$y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \tag{41}$$

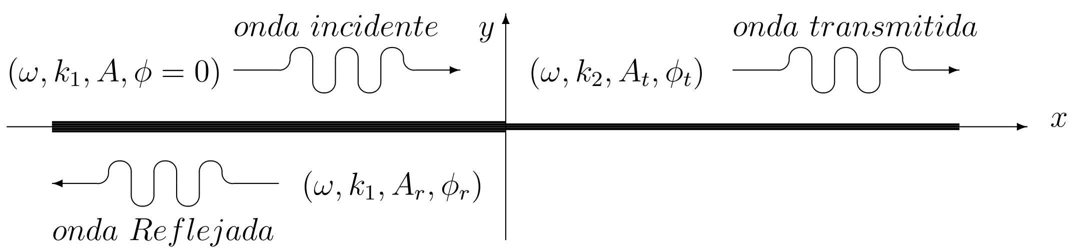
Esta expresión tiene todos los elementos escenciales de una onda estacionaria. Observe que las partes espaciales y temporales están en factores separados. Así podemos concluir que la amplitud de oscilación de cada elemento de la cuerda depende de la posición de dicho elemento. Además, todos los elementos oscilan en fase.

9 Reflexión y Transmisión de Ondas.

Considere dos cuerdas muy largas unidas mediante una soldadura. Suponga que las masas por unidad de longitud son μ_1 y μ_2 respectivamente, y que el montaje se encuentra sometido a una tensión T. Entonces, cuando se propagan ondas armónicas de frecuencia ω, los números de onda en cada tramo serán:

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \qquad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}} \tag{42}$$

Por simplicidad, comencemos por elegir el origen de coordenadas en la soldadura entre las cuerdas, y el eje x a lo largo de las mismas, de modo que el semieje positivo coincida con la cuerda 2. Supongamos ahora que una onda armónica de frecuencia angular ω y amplitud A_i viaja sobre la cuerda 1 hacia la soldadura. Como consecuencia de la inhomogeneidad de la cuerda, el fenómeno que se observa consiste en la aparición de dos nuevas ondas armónicas a partir de la incidencia de la primera sobre la soldadura. Una onda reflejada que vuelve sobre la cuerda 1 en sentido contrario a la incidente, y una onda transmitida que viaja sobre la cuerda 2 alejándose de la soldadura. Nuestro objetivo en esta sección consiste en encontrar las amplitudes A_r y A_t, y las fases iniciales relativas ϕ_r y ϕ_t de estas ondas emergentes.



Las ondas incidente, reflejada y transmitida pueden representarse como sigue

$$\begin{aligned} y_i(x,t) &= A_i \cos(k_1 x - \omega t) \\ y_r(x,t) &= A_r \cos(-k_1 x - \omega t + \phi_r) \\ y_t(x,t) &= A_t \cos(k_2 x - \omega t + \phi_t) \end{aligned} \tag{43}$$

Nótese que en todos los casos se ha utilizado la misma frecuencia angular ω. Que esto sea correcto puede deducirse intuitivamente, observando que si no fuera así, el montaje sería (de a ratos) discontínuo en la soldadura[2].

[2]Elegimos aquí una mirada intuitiva, pero si el lector prefiere los caminos formales, puede intentar obtener esta conclusión a partir de las condiciones de contorno (anímese que no es muy difícil).

La continuidad del montaje en la soldadura y el caracter localmente rígido de la misma conduce a dos condicones de frontera

$$\begin{aligned} y_i(0,t) + y_r(0,t) &= y_t(0,t) && (44) \\ y_i'(0,t) + y_r'(0,t) &= y_t'(0,t) && (45) \end{aligned}$$

donde las notaciones han sido utilizadas con el criterio siguiente

$$y'(x,t) = \partial y(x,t)/\partial x$$

siendo que

$$\begin{aligned} y_i'(x,t) &= -A_i\ k_1 \sin(k_1 x - \omega t) \\ y_r'(x,t) &= A_r\ k_1 \sin(-k_1 x - \omega t + \phi_r) && (46) \\ y_t'(x,t) &= -A_t\ k_2 \sin(k_2 x - \omega t + \phi_t) \end{aligned}$$

Evaluando las exoresiones (67) y (70) en $x = 0$ y reemplazando en las condiciones (68) y (69) respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} A_i \cos(-\omega t) + A_r \cos(-\omega t + \phi_r) &= A_t \cos(-\omega t + \phi_t) && (47) \\ -A_i\ k_1 \sin(-\omega t) + A_r\ k_1 \sin(-\omega t + \phi_r) &= -A_t\ k_2 \sin(-\omega t + \phi_t) && (48) \end{aligned}$$

Introducimos aquí los coeficientes de reflexión r y de transmisión t, según las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= A_r/A_i && (49) \\ \mathbf{t} &= A_t/A_i && (50) \end{aligned}$$

Antes de reemplazar los coeficientes r y t en las condiciones de frontera, recordemos algunas propiedades trigonométricas que ayudarán en la resolución

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos en (71) y (72)

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t - \phi_r) &= \mathbf{t}\ \cos(\omega t - \phi_t) && (51) \\ k_1 \sin(\omega t) - \mathbf{r}\ k_1 \sin(\omega t - \phi_r) &= \mathbf{t}\ k_2 \sin(\omega t - \phi_t) && (52) \end{aligned}$$

Recordemos un poco más de trigonometría...

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

con lo que (75) y (76) se convierten en

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)\cos(\phi_r) + \mathbf{r}\ \sin(\omega t)\sin(\phi_r) = \\ = \mathbf{t}\ \cos(\omega t)\cos(\phi_t) + \mathbf{t}\ \sin(\omega t)\sin(\phi_t) \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} k_1 \sin(\omega t) - \mathbf{r}\ k_1 \sin(\omega t)\cos(\phi_r) + \mathbf{r}\ k_1 \cos(\omega t)\sin(\phi_r) = \\ = \mathbf{t}\ k_2 \sin(\omega t)\cos(\phi_t) - \mathbf{t}\ k_2 \cos(\omega t)\sin(\phi_t) \end{aligned} \tag{54}$$

En estas dos últimas expresiones podemos agrupar los términos que contienen $\cos(\omega t)$ (primeros miembros) y $\sin(\omega t)$ (segundos miembros). Así tenemos

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)\,[1 + \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) - \mathbf{t}\ \cos(\phi_t)] = \\ = \sin(\omega t)\,[-\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t)] \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)\,[\mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t)] = \\ = \sin(\omega t)\,[-k_1 + \mathbf{r}\ k_1 \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \cos(\phi_t)] \end{aligned} \tag{56}$$

Aquí está la clave de la solución. Observe que el contenido de los corchetes es en todos los casos constante. De modo que las igualdades anteriores podrían escribirse simplemente como

$$\begin{aligned} a\ \cos(\omega t) &= b\ \sin(\omega t) \\ c\ \cos(\omega t) &= d\ \sin(\omega t) \end{aligned}$$

donde a, b, c y d son constantes. Pero observe que una función seno no puede ser igual a una función coseno con el mismo argumento, excepto para valores aislados del mismo. Como aquí se requiere que las igualdades se cumplan para todo tiempo (es decir en un intervalo contínuo del argumento ωt), la única posibilidad es que todos los coeficientes constantes sean nulos. Entonces los corchetes de (79) y (80) deben ser todos nulos. Así tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ \cos(\phi_t) = 1 \\ -\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ (k_2/k_1)\cos(\phi_t) = 1 \end{array} \right. \tag{57}$$

Este sistema de ecuaciones numéricas puede dividirse en dos partes. Consideremos primero el sub-sistema homogéneo dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t) = 0 \end{array} \right. \tag{58}$$

Eligiendo como incógnitas a $\sin(\phi_r)$ y $\sin(\phi_t)$, observamos que el sistema sólo admite la solución trivial nula. Entonces, los valores significativamente diferentes para ϕ_r y ϕ_t serán

$$\phi_r = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right. \qquad \phi_t = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right. \tag{59}$$

Observemos el sistema restante de (81)

$$\begin{cases} -\mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ \cos(\phi_t) = 1 \\ \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ (k_2/k_1)\cos(\phi_t) = 1 \end{cases} \tag{60}$$

Eliminando $\mathbf{r}$ entre las dos ecuaciones se tiene que

$$\mathbf{t} = \frac{2k_1}{(k_1 + k_2)\cos(\phi_t)} \tag{61}$$

pero observando (74), tenemos que $\mathbf{t}$ es definido positivo. Por tanto, de los dos valores posibles de ϕ_t sólo tendrá sentido físico $\phi_t = 0$, por lo que el coeficiente de transmisión será

$$\mathbf{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad \phi_t = 0 \tag{62}$$

Completando la resolución del sistema (84), tenemos que

$$\mathbf{r} = \frac{k_1 - k_2}{(k_1 + k_2)\cos(\phi_r)} \tag{63}$$

pero observando que $\mathbf{r}$ es definido positivo según (73), sus valores se acoplan con diferentes fases dependindo de los tamaños relativos de k_1 y k_2. Esto es

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} & \phi_r = 0 \quad si\ \ k_1 > k_2 \\ \mathbf{r} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} & \phi_r = \pi \quad si\ \ k_1 < k_2 \end{cases} \tag{64}$$

Observe que estas conclusiones pueden traducirse de acuerdo con las relaciones (66), para determinar $\mathbf{r}$ y ϕ_r de acuerdo con las densidades lineales de masa involucradas. Esto es

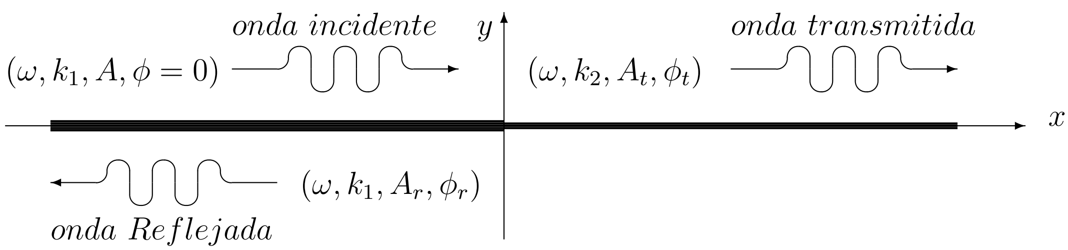
$$\begin{cases} \mathbf{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, & \phi_t = 0 \\ \mathbf{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, & \phi_r = 0 \quad si\ \ \mu_1 > \mu_2 \\ \mathbf{r} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, & \phi_r = \pi \quad si\ \ \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \tag{65}$$

Coeficientes de reflexión y transmisión.

Considere dos cuerdas muy largas unidas mediante una soldadura. Suponga que las masas por unidad de longitud son μ_1 y μ_2 respectivamente, y que el montaje se encuentra sometido a una tensión T. Entonces, cuando se propagan ondas armónicas de frecuencia ω, los números de onda en cada tramo serán:

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \qquad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}} \tag{66}$$

Por simplicidad, comencemos por elegir el origen de coordenadas en la soldadura entre las cuerdas, y el eje x a lo largo de las mismas, de modo que el semieje positivo coincida con la cuerda 2. Supongamos ahora que una onda armónica de frecuencia angular ω y amplitud A_i viaja sobre la cuerda 1 hacia la soldadura. Como consecuencia de la inhomogeneidad de la cuerda, el fenómeno que se observa consiste en la aparición de dos nuevas ondas armónicas a partir de la incidencia de la primera sobre la soldadura. Una onda reflejada que vuelve sobre la cuerda 1 en sentido contrario a la incidente, y una onda transmitida que viaja sobre la cuerda 2 alejándose de la soldadura. Nuestro objetivo en esta sección consiste en encontrar las amplitudes A_r y A_t, y las fases iniciales relativas ϕ_r y ϕ_t de estas ondas emergentes.



Las ondas incidente, reflejada y transmitida pueden representarse como sigue

$$\begin{aligned} y_i(x,t) &= A_i \cos(k_1 x - \omega t) \\ y_r(x,t) &= A_r \cos(-k_1 x - \omega t + \phi_r) \\ y_t(x,t) &= A_t \cos(k_2 x - \omega t + \phi_t) \end{aligned} \tag{67}$$

Nótese que en todos los casos se ha utilizado la misma frecuencia angular ω. Que esto sea correcto puede deducirse intuitivamente, observando que si no fuera así, el montaje sería (de a ratos) discontínuo en la soldadura[3].

La continuidad del montaje en la soldadura y el caracter localmente rígido de la misma conduce a dos condicones de frontera

$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \tag{68}$$

$$y_i'(0,t) + y_r'(0,t) = y_t'(0,t) \tag{69}$$

donde las notaciones han sido utilizadas con el criterio siguiente

$$y'(x,t) = \partial y(x,t)/\partial x$$

siendo que

$$\begin{aligned} y_i'(x,t) &= -A_i\ k_1 \sin(k_1 x - \omega t) \\ y_r'(x,t) &= A_r\ k_1 \sin(-k_1 x - \omega t + \phi_r) \\ y_t'(x,t) &= -A_t\ k_2 \sin(k_2 x - \omega t + \phi_t) \end{aligned} \tag{70}$$

[3]Elegimos aquí una mirada intuitiva, pero si el lector prefiere los caminos formales, puede intentar obtener esta conclusión a partir de las condiciones de contorno (anímese que no es muy dificil).

Evaluando las exoresiones (67) y (70) en $x = 0$ y reemplazando en las condiciones (68) y (69) respectivamente, tenemos que

$$A_i \cos(-\omega t) + A_r \cos(-\omega t + \phi_r) = A_t \cos(-\omega t + \phi_t) \tag{71}$$

$$-A_i\ k_1 \sin(-\omega t) + A_r\ k_1 \sin(-\omega t + \phi_r) = -A_t\ k_2 \sin(-\omega t + \phi_t) \tag{72}$$

Introducimos aquí los coeficientes de reflexión r y de transmisión t, según las siguientes definiciones

$$\mathbf{r} = A_r/A_i \tag{73}$$

$$\mathbf{t} = A_t/A_i \tag{74}$$

Antes de reemplazar los coeficientes r y t en las condiciones de frontera, recordemos algunas propiedades trigonométricas que ayudarán en la resolución

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos en (71) y (72)

$$\cos(\omega t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t - \phi_r) = \mathbf{t}\ \cos(\omega t - \phi_t) \tag{75}$$

$$k_1 \sin(\omega t) - \mathbf{r}\ k_1 \sin(\omega t - \phi_r) = \mathbf{t}\ k_2 \sin(\omega t - \phi_t) \tag{76}$$

Recordemos un poco más de trigonometría...

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

con lo que (75) y (76) se convierten en

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)\cos(\phi_r) + \mathbf{r}\ \sin(\omega t)\sin(\phi_r) = \\ &\qquad = \mathbf{t}\ \cos(\omega t)\cos(\phi_t) + \mathbf{t}\ \sin(\omega t)\sin(\phi_t) \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} &k_1 \sin(\omega t) - \mathbf{r}\ k_1 \sin(\omega t)\cos(\phi_r) + \mathbf{r}\ k_1 \cos(\omega t)\sin(\phi_r) = \\ &\qquad = \mathbf{t}\ k_2 \sin(\omega t)\cos(\phi_t) - \mathbf{t}\ k_2 \cos(\omega t)\sin(\phi_t) \end{aligned} \tag{78}$$

En estas dos últimas expresiones podemos agrupar los términos que contienen $\cos(\omega t)$ (primeros miembros) y $\sin(\omega t)$ (segundos miembros). Así tenemos

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t)\left[1 + \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) - \mathbf{t}\ \cos(\phi_t)\right] = \\ &\qquad = \sin(\omega t)\left[-\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t)\right] \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t)\left[\mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t)\right] = \\ &\qquad = \sin(\omega t)\left[-k_1 + \mathbf{r}\ k_1 \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \cos(\phi_t)\right] \end{aligned} \tag{80}$$

Aquí está la clave de la solución. Observe que el contenido de los corchetes es en todos los casos constante. De modo que las igualdades anteriores podrían escribirse simplemente como

$$\begin{aligned} a\ \cos(\omega t) &= b\ \sin(\omega t) \\ c\ \cos(\omega t) &= d\ \sin(\omega t) \end{aligned}$$

donde a, b, c y d son constantes. Pero observe que una función seno no puede ser igual a una función coseno con el mismo argumento, escepto para valores aislados del mismo. Como aquí se requiere que las igualdades se cumplan para todo tiempo (es decir en un intervalo contínuo del argumento ωt), la única posibilidad es que todos los coeficientes constantes sean nulos. Entonces los corchetes de (79) y (80) deben ser todos nulos. Así tenemos que

$$\begin{cases} -\mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ \cos(\phi_t) = 1 \\ -\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ (k_2/k_1) \cos(\phi_t) = 1 \end{cases} \tag{81}$$

Este sistema de ecuaciones numéricas puede dividirse en dos partes. Consideremos primero el sub-sistema homogéneo dado por

$$\begin{cases} -\mathbf{r}\ \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ \sin(\phi_t) = 0 \\ \mathbf{r}\ k_1 \sin(\phi_r) + \mathbf{t}\ k_2 \sin(\phi_t) = 0 \end{cases} \tag{82}$$

Eligiendo como incógnitas a $\sin(\phi_r)$ y $\sin(\phi_t)$, observamos que el sistema sólo admite la solución trivial nula. Entonces, los valores significativamente diferentes para ϕ_r y ϕ_t serán

$$\phi_r = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \qquad \phi_t = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \tag{83}$$

Observemos el sistema restante de (81)

$$\begin{cases} -\mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ \cos(\phi_t) = 1 \\ \mathbf{r}\ \cos(\phi_r) + \mathbf{t}\ (k_2/k_1) \cos(\phi_t) = 1 \end{cases} \tag{84}$$

Eliminando $\mathbf{r}$ entre las dos ecuaciones se tiene que

$$\mathbf{t} = \frac{2k_1}{(k_1 + k_2)\cos(\phi_t)} \tag{85}$$

pero observando (74), tenemos que $\mathbf{t}$ es definido positivo. Por tanto, de los dos valores posibles de ϕ_t sólo tendrá sentido físico $\phi_t = 0$, por lo que el coeficiente de transmisión será

$$\mathbf{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad \phi_t = 0 \tag{86}$$

Completando la resolución del sistema (84), tenemos que

$$\mathbf{r} = \frac{k_1 - k_2}{(k_1 + k_2)\cos(\phi_r)} \tag{87}$$

pero observando que $\mathbf{r}$ es definido positivo según (73), sus valores se acoplan con diferentes fases dependindo de los tamaños relativos de k_1 y k_2. Esto es

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} & \phi_r = 0 \quad\quad si \;\; k_1 > k_2 \\ \mathbf{r} = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} & \phi_r = \pi \quad\quad si \;\; k_1 < k_2 \end{cases} \tag{88}$$

Observe que estas conclusiones pueden traducirse de acuerdo con las relaciones (66), para determinar $\mathbf{r}$ y ϕ_r de acuerdo con las densidades lineales de masa involucradas. Esto es

$$\begin{cases} \mathbf{t} = \frac{2k_1}{k_1+k_2}, & \phi_t = 0 \\ \mathbf{r} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, & \phi_r = 0 \quad\quad si \;\; \mu_1 > \mu_2 \\ \mathbf{r} = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}, & \phi_r = \pi \quad\quad si \;\; \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \tag{89}$$