

Capítulo 2

Campo electrostático.

1 Carga de prueba.

Para desarrollar esta idea, comenzamos por considerar una distribución de carga en equilibrio sobre sus portadores macroscópicos. Esto implica que sobre cada elemento de carga, la fuerza neta es nula. Reflexionemos brevemente sobre esta idea. En ciertos casos, podríamos pensar que las cargas están rígidamente emplazadas en sus posiciones mediante vínculos muy resistentes (imaginemos partículas sostenidas por una estructura mecánica rígida). Pero otras veces, las cargas pueden estar en reposo pero no bloqueadas; es decir que se mantienen en equilibrio estable entre sus propias interacciones y las que experimentan con el soporte mecánico (que no las inmoviliza a priori).

Ahora supongamos que un pequeño objeto cargado se acerca al sistema. La nueva interacción tiene dos consecuencias:

a) Sobre el nuevo objeto aparece una fuerza electrostática debida al sistema de cargas preexistente. Por tanto, para que el objeto se mantenga en el lugar, necesita que un agente externo lo sostenga.

b) Sobre el sistema preexistente aparecerán fuerzas debidas al nuevo objeto, que alterarán el equilibrio original. Si la carga del sistema posee ligaduras no rígidas, habrá un reordenamiento de cargas tendiente a restablecer el equilibrio electrostático.

Un efecto muy buscado en el vasto universo de las técnicas de medición, consiste en “observar algo sin que el sistema a estudiar se de cuenta”. En lo que respecta a nuestro análisis, podríamos decir que nos interesa observar “alguna fuerza” sobre el objeto con la expectativa que el sistema original experimente la menor alteración posible. Naturalmente, esto ocurre cuando la carga del objeto es lo más pequeña posible. Por supuesto que el límite de qué tan pequeña puede ser la carga, lo impone la sensibilidad del instrumento que mide la fuerza sobre ella. Si un objeto pequeño dotado de carga eléctrica es apto para tal propósito, decimos que el mismo es un “objeto de prueba”, o más usualmente llamado “carga de prueba”.

2 Concepto de Campo electrostático.

Con la ayuda de una carga de prueba, podemos explorar el espacio circundante de cierta distribución de carga estática. Entonces observaremos que sobre la carga de prueba aparecerán fuerzas distintas según cambie su posición. Una mirada posible sobre esto, consiste en interpretar que el “espacio” posee una propiedad conferida por la distribución de cargas, la cual se manifiesta actuando sobre la carga de prueba, dando lugar a la fuerza que actúa sobre ella. A esta propiedad del espacio se la llama “campo electrostático”, y se dice que las cargas que lo originan son sus “fuentes”. Para independizar la propiedad de la carga de prueba que la detecta, definimos el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto \vec{r} , como el cociente entre la fuerza electrostática \vec{F} que actúa sobre la partícula de prueba y su propia carga, cuando la misma se sitúa en el punto \vec{r} . Esto es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\frac{\vec{F}}{q} \right]_{(\vec{r})} \quad (1)$$

Ahora bien, de acuerdo con la forma en que funcionan las cargas de prueba, es esperable que influyan indirectamente sobre el campo electrostático. Esto es, la carga de prueba alterará la distribución de cargas que da origen al campo. Entonces el campo medido de esta manera será siempre un campo alterado por la medición. Pero ¿será posible obtener el campo producido por la distribución de carga, libre de perturbaciones? Al menos, desde el punto de vista teórico, podemos definirlo. Imaginemos una secuencia de mediciones reemplazando en un mismo punto cargas de prueba cada vez más pequeñas. En el límite en que el valor de la carga de prueba tiende a cero, el sistema de cargas vuelve a su equilibrio original. Entonces una definición adecuada para el campo electrostático producido por la distribución no perturbada será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \right]_{(\vec{r})} \quad (2)$$

Volvamos ahora a la idea de que el campo electrostático es una propiedad del espacio. ¿Cómo podríamos imaginarnos esto? En realidad, nosotros estamos familiarizados con propiedades de este tipo. A veces estamos tan familiarizados que ni siquiera nos damos cuenta. Tal es el caso de la propiedad gravitatoria que “tiene” el espacio en que vivimos (a la que cabe denominar campo gravitatorio). Podríamos decir que esta propiedad es la que nos mantiene pegados al piso, la que hace que los líquidos tengan una superficie horizontal y que cualquier objeto abandonado sin soporte mecánico se caiga. En cierto sentido, podríamos decir que el espacio está afectado por una “propiedad acechante” que afecta a todo objeto material que se encuentre bajo su influencia. Por otra parte, el campo gravitatorio debe ser representado mediante vectores, dado que sus efectos (fuerzas ejercidas sobre los objetos materiales) poseen dirección y sentido.

El campo electrostático admite una representación análoga ,donde el efecto se observa sobre los objetos que poseen carga eléctrica. Aquí nuevamente el espacio puede imaginarse como erizado de de vectores al acecho¹, que esperan un objeto cargado para ejercer su influencia.

3 Líneas de campo.

Consideremos un campo vectorial genérico $\vec{A}(\vec{r})$ que se extiende sobre cierta región del espacio. Definimos una línea de campo como la curva que resulta tangente al vector campo $\vec{A}(\vec{r})$ en toda su extensión. Estas curvas responden al sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (3)$$

Las líneas de campo cumplen en general las siguientes propiedades:

a)En cada punto del espacio en que el vector campo es no nulo, pasa una y sólo una línea de campo.De esto puede concluirse que las líneas de campo no se cortan ni se bifurcan, con la posible excepción de los puntos en que el campo es nulo.

b)En cualquier región volumétrica del espacio en la que el campo es no nulo, la cantidad de líneas de campo que atraviezan la región es infinita.

En particular, cuando consideramos el campo electrostático, pueden definirse las líneas de campo electrostático como

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (4)$$

que, por supuesto cumplen con las propiedades generales anteriores.Las ecuaciones diferenciales que definen la curva, resultan en general inabordables en forma analítica. Por tal razón suelen ser determinadas en forma numérica

¹Esta frase poco formal, aunque altamente elocuente la tome prestada del Dr. Alsina Fuentes en su obra “El mundo de la mecánica”.

4 Campo electrostático de una carga puntual.

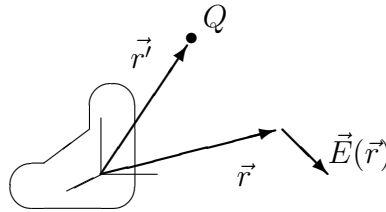
La ley de Coulomb provee todo lo necesario para derivar el campo electrostático producido por una carga puntual. Supongamos que cierta partícula de carga Q se encuentra rígidamente anclada en la posición \vec{r}' , y una partícula de prueba con carga q se sitúa en la posición \vec{r} donde se quiere determinar el campo. Entonces la fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula de prueba será

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5)$$

Observando la definición (2), concluimos que el campo electrostático producido por la carga puntual Q es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

El estudiante podrá objetar que no se ha tratado cuidadosamente el límite que



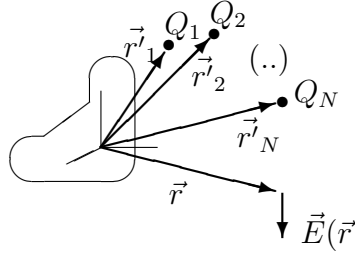
aparece en la definición (2). Sin embargo, no hay problemas, dado que hemos tenido la precaución de considerar a la partícula fuente del campo, “rígidamente” anclada. Por lo tanto, cualquiera sea el tamaño de la carga de prueba q , no alterará la localización de la fuente.

Ahora damos un poco de terminología. Como ya adelantamos, a las cargas que originan el campo se las llama “fuentes”. Pero dado que la carga eléctrica es una magnitud escalar, también se la suele referir como “fuentes escalares”. Además, a las posiciones \vec{r}' y \vec{r} se las llama “punto fuente” y “punto campo” respectivamente. Esta terminología no es, en principio, tan habitual, pero conviene ir acostumbrándose a ella.

El principio de superposición aporta la manera de extender el resultado (6) para el caso de un sistema de partículas cargadas. El campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto \vec{r} será simplemente la suma vectorial de las contribuciones de cada partícula.

Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_N las cargas de N partículas situadas en posiciones $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N$ respectivamente. Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{kQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \quad (7)$$



5 Campo electrostático de distribuciones de carga continuas.

La ley de Coulomb y el principio de superposición también conducen a una expresión muy compacta para calcular campos electrostáticos producidos por distribuciones continuas de carga. Consideremos un sustrato material cuyos puntos forman el dominio D . Supongamos que en cada fracción elemental de dicho dominio reside una carga eléctrica dQ cuya localización se representa por \vec{r}' (punto fuente). Entonces el campo electrostático \vec{E} en una posición \vec{r} (punto campo) será

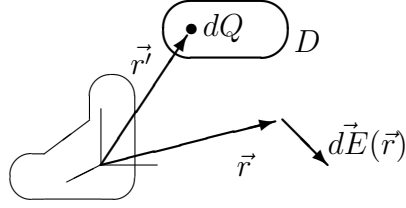
$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8)$$

Aquí es posible introducir una versión más compacta de la integral, usando las definiciones siguientes

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}' \quad u = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad \check{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9)$$

Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dq}{u^2} \check{u} \quad (10)$$

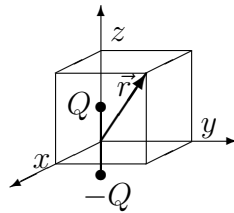


El dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Observe que dependiendo de los casos, dq debe reemplazarse en función de la densidad correspondiente. Esto es:

- I) Si D es una curva, $dq = \lambda dl$, donde λ es una densidad lineal de carga.
- II) Si D es una superficie, $dq = \sigma ds$, donde σ es una densidad superficial de carga.
- III) Si D es un volumen, $dq = \rho dv$, donde ρ es una densidad volumétrica de carga.

6 Ejemplo 1: Campo electrostático de un dipolo.

Un dipolo eléctrico admite ser modelado como dos partículas puntuales con cargas de igual valor absoluto y distinto signo, emplazadas rígidamente de modo que la distancia entre ellas se mantenga fija. Eligiendo un sistema de coordenadas adecuado, supongamos que las cargas son $-Q$ y Q y sus posiciones respectivas son $(0, 0, -a/2)$ y $(0, 0, a/2)$. Entonces, el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ puede calcularse



por superposición de las contribuciones de ambas cargas.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k(-Q)(x, y, z + \frac{a}{2})}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{kQ(x, y, z - \frac{a}{2})}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (11)$$

Con esto el problema puede considerarse formalmente resuelto.

Sin embargo, resulta de interés analizar el campo detectado por un observador lejano. Para el modo en que fue planteado el problema, la condición resulta

$$a \ll r \quad \rightarrow \quad \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ll 1 \quad (12)$$

Comencemos por desarrollar la expresión exacta del campo para reconocer términos despreciables.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ [(x, y, z) + (0, 0, \frac{a}{2})]}{\left[x^2 + y^2 + z^2 + az + \frac{a^2}{4}\right]^{3/2}} + \frac{kQ [(x, y, z) + (0, 0, -\frac{a}{2})]}{\left[x^2 + y^2 + z^2 - az + \frac{a^2}{4}\right]^{3/2}} \quad (13)$$

Ahora procedemos a eliminar los términos extremadamente pequeños de los denominadores.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ [\vec{r} + (0, 0, \frac{a}{2})]}{[r^2 + az]^{3/2}} + \frac{kQ [\vec{r} + (0, 0, -\frac{a}{2})]}{[r^2 - az]^{3/2}} \quad (14)$$

La siguiente operación pone los denominadores en formas adecuadas para realizar aproximaciones.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ [\vec{r} + (0, 0, \frac{a}{2})]}{r^3 \left[1 + \frac{az}{r^2}\right]^{3/2}} + \frac{kQ [\vec{r} + (0, 0, -\frac{a}{2})]}{r^3 \left[1 - \frac{az}{r^2}\right]^{3/2}} \quad (15)$$

Las dos expresiones que siguen muestran aproximaciones usuales, que corresponden a desarrollos en series de Taylor cortados a primer orden.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ}{r^3} \left\{ \frac{[\vec{r} + (0, 0, \frac{a}{2})]}{\left[1 + \frac{3az}{2r^2}\right]} - \frac{[\vec{r} + (0, 0, -\frac{a}{2})]}{\left[1 - \frac{3az}{2r^2}\right]} \right\} \quad (16)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ}{r^3} \left\{ \left[\vec{r} + \left(0, 0, \frac{a}{2}\right) \right] \left[1 - \frac{3az}{2r^2}\right] - \left[\vec{r} - \left(0, 0, \frac{a}{2}\right) \right] \left[1 + \frac{3az}{2r^2}\right] \right\} \quad (17)$$

Por simple aplicación de la propiedad distributiva, observamos que sobreviven los siguientes términos

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ}{r^3} \left\{ 2 \left(0, 0, \frac{a}{2}\right) - 2 \frac{3az}{2r^2} \vec{r} \right\} \quad (18)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ}{r^3} \left\{ (0, 0, a) - \frac{3az}{r^2} \vec{r} \right\} \quad (19)$$

Aquí introducimos un vector \vec{p} llamado momento dipolar eléctrico de la distribución. Para un dipolo, \vec{p} es un vector de módulo Qa , dirección según la recta que une las cargas y sentido desde la carga negativa hacia la positiva. En nuestro caso toma la forma

$$\vec{p} = (0, 0, Qa) \quad (20)$$

Reemplazando en la expresión del campo tenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^3} \{ \vec{p} - 3p \cos(\theta) \check{r} \} \quad (21)$$

o en una forma más compacta

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3} \{ 3(\vec{p} \cdot \check{r}) \check{r} - \vec{p} \} \quad (22)$$

7 Ejemplo 2: Campo electrostático sobre el eje de un anillo uniformemente cargado.

Consideremos un anillo de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Elegimos el origen de coordenadas en el centro del anillo, y el eje z coincidente con su eje de simetría. Nuestro objetivo es encontrar el campo electrostático \vec{E} en un punto de dicho eje, cuya posición será $\vec{r} = (0, 0, z)$. La simetría azimutal del sistema de cargas nos permite inferir que las componentes del campo perpendiculares al eje z son nulas. Entonces

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = E_z(z) \quad (23)$$

El campo electrostático se obtiene de resolver la integral tridimensional siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (24)$$

donde los vectores \vec{r} y \vec{r}' escritos en componentes cartesianas y coordenadas cilíndricas son

$$\vec{r} = (0, 0, z) \quad \vec{r}' = (R \cos(\phi'), R \sin(\phi'), 0) \quad (25)$$

Operando con los vectores tenemos que

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-R \cos(\phi'), -R \sin(\phi'), z) \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (26)$$

con lo que la integral toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k (-R \cos(\phi'), -R \sin(\phi'), z) dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (27)$$

Como sólo necesitamos calcular la componente E_z , tenemos

$$E_z(z) = \int_D \frac{kz dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (28)$$

Observando que la integral opera sobre el dominio de las variables primadas, tenemos que z es una constante para esta integración. Entonces

$$E_z(z) = \frac{kz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_D dq \quad (29)$$

La integral simboliza la carga total alojada en el anillo. Entonces

$$E_z(z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (30)$$

O vectorialmente

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \check{k} \quad (31)$$

8 Ejemplo 3: Extensión al caso de un disco uniformemente cargado.

Consideremos un disco de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Utilizando el mismo escenario geométrico que en el ejemplo anterior, queremos calcular el campo electrostático en un punto del eje de simetría, situado a una distancia z del centro. Una estrategia de cálculo, consiste en pensar al disco como una colección de “coronas circulares infinitesimales”, cada una de las cuales se desarrolla entre los radios r y $r + dr$ (con $0 < r < R$). Observe que cada corona infinitesimal tiene el mismo aspecto que un anillo, por lo que podemos aprovechar el resultado (31) obtenido en la sección 7. El único cuidado consiste en escribir correctamente la expresión, teniendo en cuenta su carácter diferencial (en ambos miembros), y el radio correcto. Esto es

$$dE_z(0, 0, z) = \frac{kz dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (32)$$

donde dQ es la carga residente en la corona, de $dE_z(0, 0, z)$ es la contribución al campo en $(0, 0, z)$ debido a dicha corona. Para determinar dQ introducimos la densidad superficial de carga σ que, por hipótesis, es uniforme. Entonces

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \quad dQ = 2\pi\sigma r dr \quad (33)$$

Para tener en cuenta todas las contribuciones, integramos sobre todas las coronas. Esto es

$$E_z(0, 0, z) = \int_0^R \frac{2\pi k\sigma z r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \pi k\sigma z \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \quad (34)$$

La integral ordinaria que queda se puede resolver mediante la sustitución siguiente

$$u = r^2 + z^2 \quad du = 2r \, dr \quad (35)$$

Reemplazando en (34) tenemos

$$E_z(0, 0, z) = \pi k \sigma z \int_{u_1}^{u_2} u^{-3/2} \, du = \pi k \sigma z \left[-2u^{-1/2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (36)$$

Haciendo la sustitución inversa (y un poco de álgebra) tenemos el resultado que buscamos. Aprovechamos la expresión para agregarle el carácter vectorial mediante el versor \check{k} .

$$\vec{E}(0, 0, z) = -2\pi k \sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \check{k} \quad (37)$$

Una versión algo más elocuente es

$$\vec{E}(0, 0, z) = 2\pi k \sigma \left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \check{k} \quad (38)$$

Tal vez el estudiante puede verse tentado a simplificar la raíz con el cuadrado, en el primer término del corchete. No olvide que debe tratar esta simplificación como un módulo. Ahora operamos un poco más

$$\vec{E}(0, 0, z) = 2\pi k \sigma \frac{z}{|z|} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} \quad (39)$$

Una forma compacta de escribir la última expresión, puede obtenerse introduciendo la función signo, dada por

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < z \leq 1 \\ 1 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Entonces

$$\vec{E}(0, 0, z) = 2\pi k \sigma \text{sgn}(z) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} \quad (41)$$

Esta expresión es exacta y válida sobre todo el eje z , (tanto en valores positivos como negativos).

Una conducta muy apreciada en el tratamiento matemático de un modelo físico, consiste en desarrollar algún criterio de control sobre los resultados obtenidos. En el caso del campo electrostático, siempre que las distribuciones de carga no sean infinitamente extendidas, podemos controlar que desde muy lejos parezcan fuentes puntuales. Veamos como se hace esto. Estar muy lejos sugiere que $z \gg R$, o bien

$$\frac{R}{z} \ll 1 \quad (42)$$

En este caso conviene usar una aproximación sencilla (aunque no trivial), que proviene de desarrollos en serie de Taylor. Si $a \ll 1$, entonces se cumple que²

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}a} = 1 - \frac{1}{2}a \quad (43)$$

La aproximación puede usarse en el resultado (41), cuando analizamos el caso en que se cumple la condición (42). Entonces

$$\vec{E}(0, 0, z) = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2} \right] \check{k} = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \frac{R^2}{2z^2} \check{k} \quad (44)$$

que con un reordenamiento sencillo se convierte en

$$\vec{E}(0, 0, z) = k \left(\pi R^2 \sigma \right) \frac{\operatorname{sgn}(z)}{z^2} \check{k} = \frac{kQ \operatorname{sgn}(z)}{z^2} \check{k} \quad (45)$$

Esta expresión es exactamente el campo electrostático producido por una carga puntual situada en el origen, vista por un observador situado en el eje z . Este resultado constituye una “contrastación” de la expresión (41). Es imprescindible que esto funcione, aunque no constituye una “garantía de confiabilidad del resultado”. ¿Pero entonces para que lo hacemos? Simplemente porque si no hubiera dado correctamente, habría permitido la detección de un error en (41).

9 Ejemplo 4: Extensión al caso de un plano uniformemente cargado.

Si ahora queremos abordar el problema de un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial σ , podemos pensarlo simplemente como un disco de radio infinito. El resultado puede obtenerse haciendo el límite para R tendiendo a infinito en la expresión (41). Esto es

$$\vec{E}(0, 0, z) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \check{k} \quad (46)$$

Recordando que la constante k puede escribirse en función de ϵ_0 , tenemos

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{\sigma \operatorname{sgn}(z)}{2\epsilon_0} \check{k} \quad (47)$$

²Si el lector no estuviera familiarizado con estas aproximaciones, sugerimos que al menos las compruebe en su calculadora, haciendo por ejemplo $a = 0,001$.

O en una forma alternativa

$$\vec{E}(0, 0, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (48)$$

Este resultado tiene una nota interesante. Observe el lector que el campo electrostático calculado vale para el “eje de simetría”, pensando al plano como un gran disco. Sin embargo el plano tiene una simetría mayor que el disco, por lo que pierde sentido pensar en un único eje de simetría. En tal caso podríamos decir que cualquier recta perpendicular al plano es un eje de simetría, y por tanto el resultado (??) es válido en todas partes. Así tenemos que

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (49)$$

10 Ejemplo 4: Campo electrostático de un hilo uniformemente cargado.

Consideremos un hilo recto de longitud l , sobre el cual reside una carga eléctrica Q uniformemente distribuida. Nos proponemos determinar el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en todas partes. Comencemos por reconocer que la simetría azimutal de la distribución de carga sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z . Analizando dicha simetría, concluimos que las componentes del campo deben ser de la forma

$$E_\rho = E_\rho(\rho, z) \quad E_\phi = 0 \quad E_z = E_z(\rho, z) \quad (50)$$

Observando que la carga se encuentra sobre un soporte lineal, el cálculo de las componentes del campo puede hacerse mediante la integral siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_C \frac{k\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (51)$$

donde

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad y \quad dl = dz' \quad (52)$$

mientras que los vectores \vec{r} y \vec{r}' en componentes cartesianas expresadas en coordenadas cilíndricas son

$$\vec{r} = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z) \quad \vec{r}' = (0, 0, z') \quad (53)$$

Operando con los vectores tenemos que

$$\vec{r} - \vec{r}' = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z - z') \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \quad (54)$$

Entonces la integral toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{x'_1}^{x'_2} \frac{k\lambda (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z - z') dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (55)$$

donde z'_1 y z'_2 son los límites de integración sobre el parámetro z' , que satisfacen $z'_2 - z'_1 = l$. Observe que la última expresión constituye una integral vectorial, que puede descomponerse en tres integrales escalares, de las cuales sólo hay que resolver dos. Ellas son

$$a) \quad E_\rho(\rho, z) = k\lambda\rho \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (56)$$

$$b) \quad E_z(\rho, z) = k\lambda \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{(z - z') dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (57)$$

La resolución de estas integrales nos permite alcanzar el objetivo planteado. Nótese que (56) y (57) son integrales ordinarias en el dominio unidimensional de la variable z' , a diferencia de (55) que simboliza una integral vectorial.

a) Para resolver la primera integral, comenzamos por reescribirla como sigue

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{k\lambda}{\rho} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{\frac{dz'}{\rho}}{\left[1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (58)$$

Luego proponemos la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z - z'}{\rho} = \operatorname{tg}(u) \quad \rightarrow \quad -\frac{dz'}{\rho} = \frac{du}{\cos^2(u)} \quad (59)$$

con lo que la integral toma la forma

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{[1 + \operatorname{tg}^2(u)]^{3/2} \cos^2(u)} \quad (60)$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1 + \operatorname{tg}^2(u) = 1 + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)} \quad (61)$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \cos(u) du = -\frac{k\lambda}{\rho} [\sin(u_2) - \sin(u_1)] \quad (62)$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida

$$\sin(u) = \frac{tg(u)}{\sqrt{1 + tg^2(u)}} \quad (63)$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(u) = \frac{\frac{z-z'}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2}} = \frac{z-z'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \quad (64)$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{z-z'_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} - \frac{z-z'_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} \right] \quad (65)$$

b) La integral(??) es mucho más sencilla que la anterior. La transcribimos simplemente para tenerla presente

$$E_z(\rho, z) = k\lambda \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{(z-z') dz'}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (66)$$

Para resolverla proponemos la sustitución

$$u = \rho^2 + (z-z')^2 \quad \rightarrow \quad du = -2(z-z') dz' \quad (67)$$

Entonces reemplazamos y resolvemos

$$E_z(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{2} \int_{u_1}^{u_2} u^{-3/2} du = k\lambda \left[u_2^{-1/2} - u_1^{-1/2} \right] \quad (68)$$

Luego, el resultado final es

$$E_z(\rho, z) = k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} \right] \quad (69)$$

Así completamos la resolución de las integrales. Las transcribimos reemplazando la densidad en función de los datos Q y l .

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left[\frac{z-z'_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} - \frac{z-z'_2}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} \right] \\ E_z(\rho, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} \right] \end{array} \right. \quad (70)$$

Pero aún sobrevive una dificultad. La primera de las integrales se indetermina para $\rho = 0$. Para encontrar el límite, comenzamos por buscar una aproximación para pequeños valores de ρ . Para ello reescribimos E_ρ en la forma siguiente

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left[\frac{\text{sig}(z - z'_1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z'_1}\right)^2}} - \frac{\text{sig}(z - z'_2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z'_2}\right)^2}} \right] \quad (71)$$

Luego aproximamos las raíces

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left\{ \text{sig}(z - z'_1) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z'_1} \right)^2 \right] - \text{sig}(z - z'_2) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z'_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (72)$$

con lo que operando obtenemos

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{l} \left\{ \frac{\text{sig}(z - z'_1) - \text{sig}(z - z'_2)}{\rho} - \frac{\rho}{2} \left[\frac{\text{sig}(z - z'_1)}{(z - z'_1)^2} - \frac{\text{sig}(z - z'_2)}{(z - z'_2)^2} \right] \right\} \quad (73)$$

Con este resultado estamos en condiciones de hacer el límite

$$E_\rho(0, z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} E_\rho(\rho, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < z'_1 \\ \rightarrow \infty & \text{si } z'_1 < z < z'_2 \\ 0 & \text{si } z'_2 < z \end{cases} \quad (74)$$

Para completar el análisis, observemos el límite análogo para E_z .

$$E_z(0, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - z'_1)^2}} \right] \quad (75)$$

que puede reescribirse como

$$E_z(0, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{|z - z'_2|} - \frac{1}{|z - z'_1|} \right] \quad (76)$$