

Capítulo 3

Ley de Gauss. Simetrías.

1 Concepto de flujo de un campo vectorial.

El concepto de “flujo de un campo vectorial a través de una superficie” tiene una definición matemática estricta, pero la diversidad de ejemplos físicos permite una comprensión intuitiva bastante accesible. Comencemos por definir rigurosamente. En primer lugar, supongamos que un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ existe en cierta región del espacio. Supongamos además que en dicha región definimos una superficie simple imaginaria¹, y elegimos una de sus caras para caracterizar su orientación. Luego nos imaginamos un mallado que subdivida la superficie en fragmentos diferencialmente pequeños. Sobre cada uno de ellos definimos un vector \vec{ds} cuyo módulo coincide con el área del fragmento de superficie, su dirección es perpendicular al elemento (y por tanto perpendicular a la superficie), y su sentido es saliente de la cara elegida cuando se orientó la superficie. Entonces, el flujo $\Phi_{\vec{A}S}$ del campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S se define como

$$\Phi_{\vec{A}S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

Recordando que una integral representa la suma de contribuciones diferenciales, podemos interpretar la definición como sigue. En el mallado de la superficie, nos situamos sobre uno de los elementos, y sobre él identificamos los vectores \vec{A} y \vec{ds} . Luego efectuamos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{ds}$ correspondiente al elemento elegido y el resultado (escalar) lo guardamos. Pasamos a otro elemento y repetimos el procedimiento. Así sucesivamente hasta recorrer todos los elementos de la superficie. Finalmente, sumamos todos estos resultados parciales para obtener el flujo.

Aquí conviene hacer hincapié en que el símbolo de integración, a pesar de ser gráficamente análogo, no representa una integral ordinaria, sino una integral de superficie. Este tipo de integrales requieren en general, técnicas especiales de resolución, que nosotros sólo abordaremos en casos de extrema simplicidad.

¹Descartamos aquí superficies con propiedades topológicas complejas, como aquellas que se cortan a si mismas, o las que se cierran en forma extraña como las cintas de Moebius.

2 Flujo del campo electrostático.

En este curso, el concepto de flujo será muy recurrente, debido a la diversidad de campos vectoriales que se utilizan para la debida descripción de la teoría electromagnética. Aquí va nuestro primer ejemplo. El flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S será

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

Aquí conviene remarcar que el flujo de un campo vectorial requiere siempre una doble especificación. Uno debe consignar cuál es el campo vectorial (en este caso el campo electrostático \vec{E} , y sobre que superficie orientada S se lo calcula. De estas especificaciones surge la notación que proponemos, que para este caso se subindica $\vec{E}S$.

Por otra parte, cabe observar que el flujo es una magnitud escalar, que puede tomar valores positivos y negativos. Una interpretación intuitiva del signo del flujo (aunque no estricta) puede elaborarse de la siguiente manera. Si el flujo es positivo, podemos imaginar que, predominantemente, los vectores \vec{E} y $d\vec{s}$ están del mismo lado de la superficie. Análogamente tendremos valores negativos de flujo cuando los vectores \vec{E} y $d\vec{s}$ queden, predominantemente, uno a cada lado de la superficie².

3 Ejemplo de cálculo de flujo.

Consideremos el campo electrostático producido por un hilo recto infinito, con densidad lineal de carga uniforme λ . Según hemos visto, si el hilo se encuentra sobre el eje z , el campo $\vec{E}(\vec{r})$ viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \check{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, 0)}{(x^2+y^2)} \quad (3)$$

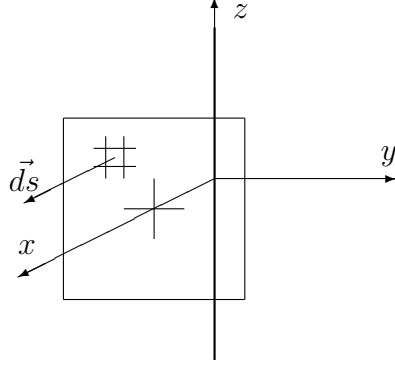
donde la segunda expresión no es más que la traducción en componentes y coordenadas cartesianas.

Como ejemplo, proponemos calcular el flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de una superficie cuadrada de lado l , situada como indica la figura

En este contexto, los vectores $d\vec{s}$ tienen la forma siguiente

$$d\vec{s} = dy dz \check{k} = dy dz (1, 0, 0) \quad (4)$$

²Lo que hace imprecisa la interpretación es la palabra “predominantemente”. Esta palabra se utiliza para indicar que sobre la superficie, puede haber zonas donde el campo E esté a un lado de S , y otras zonas en que ocurra lo contrario. Entonces el signo del flujo corresponderá al comportamiento dominante.



Así tenemos todos los ingredientes para resolver la integral (2). Por simplicidad mantendremos la notación x para indicar la coordenada correspondiente a la localización de la superficie. Entonces tenemos que

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{d}s = \int_S \frac{\lambda (x, y, 0)}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \cdot dy dz (1, 0, 0) \quad (5)$$

Resolviendo el producto escalar y agregando los límites de integración, tenemos

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda x dy dz}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} = \frac{\lambda x}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{x^2 + y^2} \int_{-l/2}^{l/2} dz \quad (6)$$

La segunda integral es de resolución inmediata, mientras que la primera puede escribirse en un formato conocido

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{x \left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]} \quad (7)$$

Esta integral admite la sustitución siguiente

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad du = \frac{dy}{x} \quad (8)$$

con lo que se obtiene

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \left[\text{arctg} \left(\frac{l}{2x} \right) - \text{arctg} \left(-\frac{l}{2x} \right) \right] \quad (9)$$

Observando que el arcotangente es una función impar obtenemos el resultado final

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{\pi\epsilon_0} \text{arctg} \left(\frac{l}{2x} \right) \quad (10)$$

4 Ley de Gauss.

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ y sus fuentes (cargas eléctricas estáticas), descritas mediante una densidad volumétrica $\delta(\vec{r}')$. Ahora elegimos una superficie cerrada imaginaria cualquiera S que limita un volumen V . Elegimos la orientación de la superficie S de modo que sus vectores normales \vec{ds} resulten exteriores. Entonces el flujo del campo electrostático \vec{E} a través de la superficie cerrada S es proporcional a la carga Q_{RS} residente en el volumen V limitado por dicha superficie. Esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta \, dv \quad (11)$$

donde la constante ϵ_0 vale

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,842 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta la notación introducida para flujos, podemos escribir una expresión de bolsillo equivalente

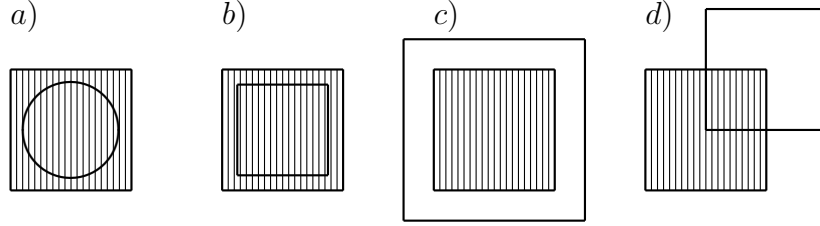
$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (13)$$

La ley de Gauss es una de las ecuaciones integrales del campo electrostático, y su aplicabilidad es universal. Esto es, no tiene restricciones para su aplicación en electrostática. Sin embargo, no constituye en general una herramienta que, por sí misma, permita determinar el campo electrostático a partir de la distribución de fuentes. Sólo si la distribución es altamente simétrica, la ley de Gauss puede proveer una técnica de cálculo viable a tal fin. Nosotros abordaremos esta técnica, después de discutir algunos conceptos relacionados con la simetría. Por el momento daremos algunas aplicaciones directas para ilustrar el uso de la ley de Gauss en relación con los flujos.

5 Ejemplo de aplicación de la ley de Gauss.

Consideremos un cuerpo cúbico de lado l que aloja una carga total Q uniformemente distribuida en su volumen. Supongamos que el origen de coordenadas lo elegimos coincidente con el centro del cubo. Nos proponemos calcular el flujo del campo electrostático a través de las superficies siguientes.

- a) Una superficie esférica S_a , de radio $3l/8$ centrada en el origen.
- b) Una superficie cúbica S_b , de lado $3l/4$ centrada en el origen.
- c) Una superficie cúbica S_c , de lado $3l/2$ centrada en el origen.
- d) Una superficie cúbica S_d , de lado l con un vértice en el origen.



En primer lugar observemos que la densidad volumétrica de carga δ es constante, y vale

$$\delta = \frac{Q}{l^3}. \quad (14)$$

La estrategia para obtener el flujo del campo \vec{E} producido por la distribución, consiste en determinar la cantidad de carga “encerrada” dentro de cada superficie. En los casos a y b , los volúmenes limitados por las superficies están completamente ocupados por la distribución de carga. Entonces tenemos que

$$\Phi_{\vec{E}S_a} = \frac{4\pi \cdot 27 l^3 \delta}{3 \cdot 512 \epsilon_0} = \frac{9\pi Q}{128 \epsilon_0} \quad (15)$$

$$\Phi_{\vec{E}S_b} = \frac{27 l^3 \delta}{64 \epsilon_0} = \frac{27 Q}{64 \epsilon_0} \quad (16)$$

Por su parte, la superficie S_c contiene toda la carga de la distribución en el volumen que ella limita. Por último, la superficie S_d contiene la octava parte de la carga total. Entonces tenemos

$$\Phi_{\vec{E}S_c} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17)$$

$$\Phi_{\vec{E}S_d} = \frac{Q}{8 \epsilon_0} \quad (18)$$

Observe el lector, que la ley de Gauss nos ha permitido el cálculo de los respectivos flujos “sin calcular” el campo \vec{E} (que dicho sea de paso, no es nada fácil de calcular para esta distribución).

6 Relación entre líneas de campo y fuentes.

La Ley de Gauss permite el análisis de la relación que existe entre las líneas de campo electrostático y las cargas (fuentes escalares) que le dan origen a dicho campo. Comencemos por imaginar una carga puntual y una superficie esférica imaginaria centrada en ella. Si la carga es positiva y la esfera suficientemente pequeña, el campo electrostático sobre la superficie estará representado por vectores exteriores a la misma. En cierto modo, pensando en la orientación de las líneas de campo, podríamos decir que ellas “salen” de la superficie esférica. Por extensión, podríamos decir que “nacen” en la carga positiva.

El mismo análisis es válido para cargas negativas, aunque las mismas representarían el punto de finalización de la línea de campo. En conclusión, decimos que las líneas de campo se inician en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

Supongamos ahora que cierta superficie cerrada no posee cargas eléctricas en su interior. Entonces dentro de ella no se inician ni terminan líneas de campo. En otras palabras, si una línea de campo cruza la superficie en un punto en sentido entrante, necesariamente debe cruzarla otra vez (por supuesto, en otro punto) en sentido saliente ³.

Algunos autores suelen referirse a esta propiedad diciendo que si en el interior de una superficie cerrada no residen cargas eléctricas, entonces habrá tantas líneas de campo entrantes como salientes. En apariencia este enunciado parece ser una buena síntesis de la propiedad presentada anteriormente. Sin embargo, no es apropiado considerar cuantitativamente a las líneas de campo, dado que cualquiera sea el tamaño de la superficie, siempre habrá una cantidad infinita de ellas que la atraviezan.

7 Simetría de distribuciones y campos.

Las propiedades integrales de los campos, como la ley de Gauss y otras que trataremos más adelante, constituyen una herramienta de cálculo muy práctica para ciertos casos en que las fuentes del campo tienen alta simetría. Pero esto sólo es un pretexto para introducir algunas ideas sobre simetría que, como seguramente el estudiante podrá apreciar, exceden ampliamente al tema que aquí tratamos. La intención es promover la creatividad operativa, en detrimento de tediosos cálculos formales, a la vez que intentamos generar criterios de control simples y eficaces.

³Esta conclusión falla en los casos especiales en que existen puntos de campo nulo en el volumen limitado por la superficie cerrada. Estos casos especiales serán tratados más adelante.

Comencemos reconociendo una propiedad más que evidente. Cuando una distribución de fuentes se traslada o cambia de orientación sin modificar su forma, el campo asociado a ella se traslada o rota con ella. Los ejemplos son muy elocuentes. La tierra lleva consigo los campos magnético y gravitatorio que genera. Evidencia de ello es que las brújulas de los marinos siguen apuntando al norte, mientras que las plomadas de los albañiles siguen apuntando hacia abajo, tanto en invierno como en verano, y tanto de día como de noche. Un ejemplo más cotidiano lo representan los imanes. Cuando alguien compra un imán, en realidad está interesado en su campo magnético, el cual “viaja” junto con el imán a todas partes. En cierto modo podríamos decir que el campo está “atado” a las fuentes que lo originan⁴.

Ahora centremos la atención en cuestiones geométricas. Comencemos por imaginar un cuerpo sólido sobre el que reside una distribución de cargas. Cualquier cambio de lugar u orientación del cuerpo puede pensarse como una secuencia de rotaciones y traslaciones. Pero en ciertas circunstancias, el movimiento del cuerpo lo sitúa de modo que la distribución de cargas es idéntica a la que había originalmente. Como ejemplo imaginemos una pieza cuadrada que posee cargas puntuales positivas idénticas en sus vértices. Si la misma rota en un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor de un eje que pasa por el centro del cuadrado, y es perpendicular al plano que lo contiene (ver figura), el aspecto de la distribución rotada coincide con la forma original. En ese caso decimos que la distribución de cargas tiene una “simetría de rotación”. Además decimos que el eje mencionado es un “eje de simetría” de la distribución.

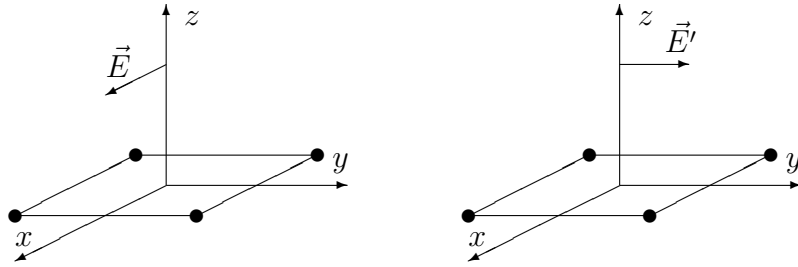


El paso siguiente consiste en preguntarnos por el campo electrostático asociado a la distribución. Es evidente que si las distribuciones original y rotada son indistinguibles, los campos que generan también lo serán. Entonces la simetría de la distribución de fuentes se observa también en el campo que ella genera.

Un razonamiento análogo puede hacerse para el caso de traslaciones, aunque sólo se observará simetría (en sentido estricto) cuando las distribuciones sean infinitamente extendidas. Por tanto, este tipo de simetría sólo será admitida en el mundo de los modelos.

⁴Veremos más adelante que esto no siempre es así. Podríamos decir en forma algo más precisa, que esta propiedad asiste a los campos estáticos, como es el caso del campo electrostático, y los otros mencionados en los ejemplos. Más adelante trataremos los campos dependientes del tiempo donde las cosas son diferentes.

Volvamos al ejemplo del cuadrado. ¿Qué nos puede decir la simetría acerca del campo? Veamos un modo posible de análisis. Supongamos que el sistema



de coordenadas cartesianas se sitúa como indica la figura, y estamos interesados en saber “algo” respecto del campo electrostático sobre el eje z . En principio, no sabemos la orientación del campo, por lo que aventuramos que el mismo apunta en el sentido positivo del eje x (primera figura). Luego rotamos la distribución un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor del eje z (segunda figura). Observemos dos detalles

a) Como el campo está “atado” a la distribución, debe girar con ella, por lo que quedará apuntando en la dirección del eje y .

b) Como z es un eje de simetría, la distribución rotada es idéntica a la original. por lo que debe producir exactamente el mismo campo.

Las dos afirmaciones resultan incompatibles, por lo que concluimos que nuestra hipótesis es errónea. Por lo tanto el campo electrostático no podrá tener componente x . El mismo análisis cabe para la componente y , por lo que concluimos que

$$\vec{E}(0, 0, z) = E_z(z) \check{k} \quad (19)$$

Observe que la simetría no permitió la determinación del campo, pero a través de este análisis pudimos determinar dos de las tres componentes. Este tipo de tratamiento es indispensable antes de utilizar la ley de Gauss como recurso para la determinación de un campo.

8 Distribuciones con simetría esférica.

Una distribución de carga con simetría esférica, es aquella en que la densidad de carga $\delta(\vec{r}')$ depende exclusivamente de la distancia a un centro. Si elegimos como origen de coordenadas a dicho centro, y utilizamos coordenadas esféricas, tenemos

que

$$\delta = \delta(r') \quad (20)$$

Para analizar la simetría del campo generado por la distribución, consideremos un punto P cualquiera (que no sea el origen), cuya distancia al origen es r . La recta determinada por P y el origen, es un eje de simetría de la distribución. Entonces en P sólo sobrevive la componente en la dirección del eje, es decir la componente radial. Por otra parte, cualquier rotación de la distribución debe mantener inalterable el campo en P , por lo que todos los puntos que se encuentren sobre una superficie esférica de radio r centrada en el origen, tendrán la misma componente radial del campo \vec{E} . Esto nos permite caracterizar al campo electrostático como

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \check{r} \quad (21)$$

Esta conclusión es de crucial importancia para que la ley de Gauss pueda funcionar como recurso para la determinación del campo electrostático. Nótese que la simetría nos permitió determinar ya dos de las tres componentes esféricas del campo

$$E_\theta(\vec{r}) = E_\phi(\vec{r}) = 0 \quad (22)$$

Veamos ahora como hacer la determinación de $E_r(\vec{r})$. Estamos interesados en conocer la componente radial en el punto P situado en \vec{r} , por lo que la distancia al centro es r (coordenada radial). Siempre existe una superficie esférica S centrada en el origen, que pasa por P , cuyo radio es r . ¿Qué nos dice la ley de Gauss? Transcribimos la expresión (11)

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta \, dv \quad (23)$$

donde V es el volumen limitado por S , \vec{E} es de la forma (21), δ viene dada por (20) y los diferenciales involucrados son

$$\vec{ds} = ds \check{r} \quad y \quad dv = 4\pi r'^2 \, dr' \quad (24)$$

Note que la variable r' recorre todo el dominio entre 0 y r , para cubrir todo el volumen V . Entonces tenemos

$$\oint_S E_r(r) \check{r} \cdot ds \check{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \delta(r') \, 4\pi r'^2 \, dr' \quad (25)$$

En la primera integral podemos observar que el producto escalar opera entre dos versores iguales. Entonces

$$\check{r} \cdot \check{r} = 1 \quad (26)$$

En la misma integral, observemos además que, a pesar que r es una variable, en el dominio de integración constituido por la superficie S , todos los puntos involucrados

tienen la “misma” coordenada r . Por tanto, la componente $E_r(r)$ es constante a los fines de esta integración. Entonces

$$E_r(r) \oint_S ds = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (27)$$

La integral de superficie representa el área de la superficie esférica de radio r , por lo que tenemos

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (28)$$

Finalmente

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (29)$$

Este análisis es válido para todas las distribuciones de carga cuya densidad volumétrica tiene simetría esférica. Sin embargo, algunas veces conviene trabajar con una expresión equivalente, que puede resultar más intuitiva

$$E_r(r) = \frac{Q_{RS}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (30)$$

donde Q_{RS} representa la carga residente en el volumen V interior a la superficie S .

9 Ejemplo de aplicación.

Consideremos una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida en su volumen. Su densidad constante será

$$\delta_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (31)$$

Supongamos primero que $r < R$, por lo que la superficie esférica imaginaria utilizada para aplicar la ley de Gauss está dentro de la región de cargas. Aplicamos (29) observando que δ es constante. Entonces

$$E_r(r) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 dr' \quad (32)$$

Resolviendo la integral tenemos

$$E_r(r) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0 r^2} \frac{r^3}{3} \quad (33)$$

Reemplazando δ_0 por (31) y simplificando obtenemos

$$E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (34)$$

Ahora tratamos el caso $r > R$. Aquí observamos que toda la carga de la distribución queda dentro de la superficie gaussiana. Por tanto conviene utilizar (30), haciendo que $Q_{RS} = Q$. Entonces

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (35)$$

El resultado final del problema se obtiene combinando (34) y (36), confiriéndole carácter vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \check{r} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \check{r} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (36)$$

10 Distribuciones con simetría cilíndrica.

Los sistemas con simetría cilíndrica sólo existen en el mundo de los modelos, ya que se trata de objetos infinitamente largos. Entonces comencemos por imaginar una distribución de carga que se extiende infinitamente a lo largo del eje z . Utilizando coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z , decimos que la distribución tiene simetría cilíndrica cuando la densidad volumétrica de carga es sólo función de la coordenada ρ .

$$\delta(\vec{r}') = \delta(\rho') \quad (37)$$

Analicemos ahora la simetría del campo electrostático. Para ello elegimos un punto P cualquiera que no pertenezca al eje z , y trazamos una recta que corte perpendicularmente al eje z pasando por P . Ahora tratemos de convencernos que dicha recta es un eje de simetría. Para ello observemos simplemente que si rotamos la distribución en un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide exactamente con el aspecto original. Entonces podemos concluir que la única componente no nula del campo es E_ρ . Por otra parte, desplazamientos de la distribución a lo largo del eje z , o rotaciones de cualquier ángulo alrededor del mismo, no alteran el campo en P . Por lo tanto, la componente E_ρ es la misma sobre una superficie cilíndrica de radio ρ centrada en el eje z . En otras palabras, E_ρ sólo depende de la coordenada ρ . Entonces

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho(\rho) \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

O en forma vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho) \check{\rho} \quad (39)$$

Ahora nos disponemos a buscar el campo electrostático, en el punto P , (cuya coordenada radial es ρ) mediante la ley de Gauss. Para ello elegimos una superficie cilíndrica de radio ρ y longitud l , coaxial con la distribución. Para que la superficie sea cerrada, la completamos con dos tapas circulares en los extremos. A las tres partes que componen la superficie cerrada S las llamaremos respectivamente S_C , S_{T1} y S_{T2} , de modo que

$$S = S_C \cup S_{T1} \cup S_{T2} \quad (40)$$

Los vectores normales exteriores a cada parte de la superficie S son de las formas siguientes

$$\begin{aligned} \vec{ds}_C &= ds_C \check{\rho} \\ \vec{ds}_{T1} &= -ds_{T1} \check{k} \\ \vec{ds}_{T2} &= ds_{T2} \check{k} \end{aligned} \quad (41)$$

Por su parte, los diferenciales de volumen de la distribución, que quedan dentro de la superficie cerrada S , pueden escribirse como sigue

$$dv = 2\pi l \rho' d\rho' \quad (42)$$

Aquí estamos en condiciones de aplicar la ley de Gauss (11), que toma la forma

$$\oint_S E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta(\rho') 2\pi l \rho' d\rho' \quad (43)$$

En virtud de (40) la integral de superficie puede separarse en tres partes. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{S_C} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_C + \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_{T1} + \int_{S_{T2}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_{T2} &= \\ &= \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_C} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot ds_C \check{\rho} + \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot (-ds_{T1} \check{k}) + \int_{S_{T2}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot ds_{T2} \check{k} &= \\ &= \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \end{aligned} \quad (45)$$

Los productos escalares que aparecen en las integrales de superficie son

$$\check{\rho} \cdot \check{\rho} = 1 \quad \check{\rho} \cdot \check{k} = 0 \quad (46)$$

con lo que las integrales sobre las tapas S_{T1} y S_{T2} son nulas. Entonces tenemos

$$\int_{S_C} E_\rho(\rho) ds_C = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (47)$$

Ahora observemos que todos los puntos de la superficie de integración S_C tienen la misma coordenada ρ , por lo que la componente $E_\rho(\rho)$ es constante sobre S_C . Entonces podemos extraer la componente de la integral

$$E_\rho(\rho) \int_{S_C} ds_C = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (48)$$

La integral de superficie que nos queda puede interpretarse como el área de la superficie S_C . Entonces

$$E_\rho(\rho) 2\pi l \rho = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (49)$$

Con lo que finalmente tenemos

$$E_\rho(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0 \rho} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (50)$$

Observe que desapareció el parámetro l (como era de esperarse), dado que el mismo es completamente artificial en relación con el modelo de distribución de carga.

11 Ejemplo de aplicación.

Consideremos un cuerpo cilíndrico macizo de radio R infinitamente largo, que posee una densidad volumétrica de carga dada por

$$\delta(\rho') = a \rho'^2 \quad (\rho' < R) \quad (51)$$

Aquí tenemos que analizar dos situaciones. Primero tratamos el caso en que el punto P está dentro del cuerpo cilíndrico ($\rho < R$). Por aplicación de (50) tenemos

$$E_\rho(\rho) = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \int_0^\rho \rho'^3 d\rho' = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \frac{\rho^4}{4} = \frac{a\rho^3}{4\epsilon_0} \quad (52)$$

Ahora veamos que ocurre si P está fuera del cuerpo ($\rho > R$). Nuevamente aplicamos (50), pero observando que la contribución a la carga requiere integrar desde cero hasta R , dado que más allá de R no hay carga (densidad nula). Entonces

$$E_\rho(\rho) = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \int_0^R \rho'^3 d\rho' = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \frac{R^4}{4} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0 \rho} \quad (53)$$

El resultado final, incluyendo el carácter vectorial del campo será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{a\rho^3}{4\epsilon_0} \check{\rho} & \text{si } \rho < R \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 \rho} \check{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases} \quad (54)$$

12 Distribuciones con simetría plana.

La simetría plana es otro caso que sólo ocurre en el mundo de los modelos, ya que se trata de distribuciones infinitamente extendidas. Para caracterizar estas distribuciones utilizamos coordenadas cartesianas, y decimos que la densidad volumétrica de carga sólo depende de una de dichas coordenadas, por ejemplo z' . Entonces tenemos

$$\delta(\vec{r}') = \delta(z') \quad (55)$$

Para analizar la simetría del campo electrostático, usamos la misma estrategia que en los casos anteriores. Esto es, tratamos de encontrar un eje de simetría de la distribución. Para ello, elegimos un punto P cualquiera y hacemos pasar por él una recta paralela al eje z . Luego observamos que si la distribución de carga rota un ángulo cualquiera alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide con su aspecto original. Entonces la recta constituye un eje de simetría, y por tanto la única componente que sobrevive en P es E_z . Por otra parte, si la distribución se desplaza paralelamente al plano xy , el campo en P debe permanecer invariante, por lo que el campo debe tener idéntica componente E_z sobre todo el plano paralelo a xy que contiene a P . Esto significa que la componente E_z no puede depender de las coordenadas x e y . Entonces

$$E_x = E_y = 0 \quad E_z = E_z(z) \quad (56)$$

Aunque esta información es análoga a las de los casos de simetría tratados anteriormente, la aplicación de la ley de Gauss para la determinación del campo electrostático es posible, pero en general no inmediata. En este caso será necesario definir una distribución elemental a modo de “prototipo”, determinar su contribución al campo, y luego resolver aplicando el principio de superposición. Afortunadamente, este cálculo es bastante sencillo, por lo que lo abordaremos ahora.

Para comenzar, trataremos un caso particular que servirá como “prototipo” para tratamientos posteriores. Consideremos una distribución de carga contenida en un plano infinitamente extendido, cuya densidad superficial de carga uniforme es σ . Observe que su simetría corresponde al caso que tratamos, por lo que el campo que genera tiene las componentes dadas por (56). Nos proponemos calcular la componente E_z del campo electrostático en un punto P , situado a una distancia z_0 del plano de la distribución. Por sencillez elegimos el origen sobre el plano de carga, de modo que el mismo coincida con el plano $x - y$, y el eje z pase por P . Para aplicar la ley de Gauss, elegimos una superficie cilíndrica S_C de longitud $2z_0$ y radio cualquiera, cuyo eje coincida con el eje z , y se extiende simétricamente a cada lado de la distribución. Para que la superficie sea cerrada, completamos con dos tapas circulares T_1 y T_2 , paralelas al plano $x - y$, situadas respectivamente en $-z_0$ y z_0 . De este modo, la superficie cerrada S se compone como sigue

$$S = S_C \cup T_1 \cup T_2 \quad (57)$$

y los respectivos vectores diferenciales normales exteriores son

$$\vec{d}s_{SC} = ds_{SC} \check{\rho} \quad \vec{d}s_{T_1} = -ds_{T_1} \check{k} \quad \vec{d}s_{T_2} = ds_{T_2} \check{k} \quad (58)$$

Ahora observemos un detalle de simetría. Si la distribución se gira un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor del eje x , la distribución rotada y la original tienen el mismo aspecto. Por lo tanto en P se debe observar el mismo campo. Pero como el campo está “atado” a la distribución, su estructura a un lado del plano $x - y$, debe ser una imagen especular de la estructura del otro lado. Esto es

$$E_z(-z_0) \check{k} = -E_z(z_0) \check{k} \quad (59)$$

Nótese que esta propiedad sólo vale para el prototipo, de modo que no hubiéramos podido aplicarla para cualquier distribución con simetría plana.

Ahora estamos en condiciones de utilizar la ley de Gauss dada por la expresión (11).

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{d}s = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (60)$$

Reemplazando (56), (57) y (58) en (60), tenemos

$$\int_{S_C} E_z(z) \check{k} \cdot \vec{d}s_{SC} + \int_{T_1} E_z(-z_0) \check{k} \cdot \vec{d}s_{T_1} + \int_{T_2} E_z(z_0) \check{k} \cdot \vec{d}s_{T_2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (61)$$

Aplicando la condición de simetría (59) y detallando los versores involucrados en los diferenciales de superficie, tenemos

$$\int_{S_C} E_z(z) \check{k} \cdot ds_{SC} \check{\rho} - \int_{T_1} E_z(z_0) \check{k} \cdot (-ds_{T_1} \check{k}) + \int_{T_2} E_z(z_0) \check{k} \cdot ds_{T_2} \check{k} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (62)$$

Resolviendo los productos escalares entre versores, observamos que la primera integral es nula.

$$\int_{T_1} E_z(z_0) ds_{T_1} + \int_{T_2} E_z(z_0) ds_{T_2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (63)$$

Como las tapas T_1 y T_2 tienen todos sus puntos a la misma distancia del plano de cargas, los integrandos son constantes. Entonces

$$E_z(z_0) \int_{T_1} ds_{T_1} + E_z(z_0) \int_{T_2} ds_{T_2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (64)$$

Las integrales representan las áreas de las tapas. Las mismas son iguales y coinciden además con el área de la fracción del plano de cargas que hay dentro de la superficie S . A todas estas áreas las llamamos A . Entonces

$$E_z(z_0) A + E_z(z_0) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (65)$$

Con lo que finalmente concluimos que

$$E_z(z_0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (66)$$

Note que el resultado es independiente de la localización z_0 del punto P . Teniendo en cuenta la simetría (59), la forma vectorial final es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (67)$$