**Capítulo 5**
**Electrostática en medios conductores.**

# 1 El modelo microscópico.

Comencemos por imaginar un modelo microscópico de conductor sólido. Una versión muy simplificada se compone de las siguientes partes:

a) Un arreglo tridimensional compacto de iones positivos, cuyas posiciones relativas se mantienen constantes (red fija). Cada uno de los iones puede pensarse como un átomo del metal, que ha cedido uno o dos electrones al momento de tomar parte del cuerpo al que pertenece.

b) Un gas ideal de electrones de conducción, que deambulan libremente como si estuvieran en una cavidad cuyas paredes son las fronteras del cuerpo. Estos electrones son cedidos por los átomos al convertirse en iones positivos para formar el cuerpo.

Con este modelo cabe imaginar que la carga positiva permanece fija dentro del conductor y distribuida uniformemente en su volumen. Por su parte, los electrones de conducción son móviles y se distribuyen en forma estadísticamente uniforme en todo el volumen del conductor. Con esto, podemos entender que el conductor resulte a priori local y globalmente neutro.

Ahora nos preguntamos ¿Cuánta carga positiva y negativa habrá dentro de un conductor? Para fijar ideas, imaginemos una muestra cúbica de metal de 1 $cm$ de lado. Una distancia típica de separación entre núcleos atómicos en un sólido es del orden de 1 $Armstrong = 10^{-8}\ cm$. Entonces en la muestra caben $10^{24}$ iones. Si por cada ión existe 1 electrón de conducción, la muestra tendra un gas ideal formado por $10^{24}$ electrones uniformemente distribuidos en 1 $cm^3$. Por tanto, la densidad será típicamente del orden de $10^{24}$ partículas por centímetro cúbico. Recordando que la carga elemental es $e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, tenemos que la densidad de carga positiva fija en la red de iones será

$$\rho_+ \ = \ 1,6 \times 10^5\ C/cm^3 \qquad (1)$$

Por su parte, los electrones de conducción se distribuyen estadísticamente con una densidad promedio

$$\rho_- \ = \ -1,6 \times 10^5\ C/cm^3 \qquad (2)$$

Por ser el conductor eléctricamente neutro, tanto en general cono localmente, el mismo no genera a prioi campos electrostáticos macroscópicos.

Este modelo, a pesar de ser muy simplificado, posee los elementos modernos escenciales. Esto es, da cuenta de los portadores de carga tal como se los concibe actualmente, incluyendo sus condiciones de movilidad. Sin embargo, cuando se formuló la teoría electromagnética hoy vigente (mediados del siglo XIX), los científicos estaban aún muy lejos de la formulación de un modelo microscópico detallado. Evidentemente la carencia de dicho modelo no fue escollo para alcanzar una formulación correcta. Por esto es que conviene repasar brevemente lo que pensaban en lo que llamaremos "el modelo clásico".

## 2 El modelo clásico.

La concepción clásica acerca de la carga consiste en suponer que sus dos formas posibles (positiva y negativa) pueden interpretarse como dos fluidos análogos. Esto es que ambos tienen idéntica movilidad y que ambos residen en idénticas proporciones dentro de los conductores. Así es que los cientiíficos antiguos pensaban en la posibilidad de migración tanto de cargas positivas como negativas.

¿Por qué este modelo no falla? Simplemente porque la formulación del electromagnetismo no puede distinguir a priori si un cuerpo cargado positivamente, lo está por exceso de carga positiva o por defecto de carga negativa. En tal sentido, el modelo clásico no es erróneo al nivel en que la teoría lo requiere[1].

## 3 Conductores con carga no compensada.

Cuando nos referimos a un conductor cargado, entendemos que sobre él pueden reconocerse sectores en los que existe carga no localmente compensada. Esto puede darse mediante dos mecanismos:

a) Cuando el conductor tiene un exceso real de cargas de un tipo, ya sea por exceso de electrones de conducción (carga negativa), o por defecto de los mismos (carga positiva). Para que tal mecanismo pueda darse, es indispensable el tránsito de cargas desde o hacia otros cuerpos, por lo que decimos que el proceso de carga es por contacto.

b) Cuando el conductor es sometido a un campo externo, su carga interna se redistribuye originando sectores con densidades de carga no nulas. Cuando un cuerpo adquiere carga local mediante este mecanismo, decimos que ha sido cargado por

[1]Una paradoja que puso de manifiesto las limitaciones del modelo clásico surgió con el efecto Hall, al que nos referiremos más adelante.

inducción.

En lo que sigue de esta sección, nos referiremos al caso en que el conductor ha adquirido un exceso de carga (caso $a$). Pospondremos el tratamiento del caso inductivo para secciones posteriores.

Para comprender los procesos internos en el conductor, cuando el mismo adquiere un exceso de carga, utilizaremos una idea basada en el modelo clásico (aunque con algo de caricatura). Imaginemos una pizzera sobre una mesa desprovista de toda propiedad eléctrica. Supongamos ahora que tres pelotitas de ping-pong igualmente cargadas, se liberan sobre la pizzera. Sus repulsiones mútuas las llevarán a topar con el borde y quedar estáticas en posiciones que forman los vértices de un triángulo equilátero. En tales condiciones, cada pelotita estará afectada por las fuerzas de interacción con las otras dos, y la fuerza de vínculo debida al borde de la pizzera. Observe que cada una de las pelotitas se encuentra en equilibrio estable. Si el experimento se repitiera con $n$ pelotitas, es fácil imaginar que las mismas se acomodarían sobre el borde de la pizzera formando los vértices de un polígono regular de $n$ lados.

Homologando esta idea intuitiva con el funcionamiento de un medio conductor, podemos extraer algunas conclusiones importantes. En primer lugar, si pensamos que dentro de un sólido conductor existe un exceso de carga, sus interacciones múltiples combinadas con su movilidad las llevarán hasta la superficie. Durante el "proceso transitorio" en que las cargas están reorganizándose, no habrá equilibrio, por lo que diremos que la situación no es electrostática. Finalmente se alcanzará el equilibrio estable cuando la carga se sitúe sobre la superficie.

Nótese que esta conclusión es independiente de la forma del cuerpo.

Por otra parte, la simetría del modelo planteado conduce a una distribución de carga uniforme. De esto puede concluirse que un exceso de carga en una esfera conductora se distribuirá sobre su superficie con una densidad uniforme. Nótese que este efecto requiere la simetría del cuerpo, por lo que no debe considerarse un resultado general.

# 4 Campo y potencial electrostáticos en el interior de un conductor.

Ya hemos visualizado que los excesos de carga, en condiciones electrostáticas, se sitúan en la superficie del conductor. Ahora podemos preguntarnos ¿Cómo será el campo electrostático generado por la distribución de carga superficial? Para responder esta pregunta, comencemos por recordar que, tanto en el modelo microscópico como en el clásico, el conductor está dotado de cargas libres de moverse por su volumen. Entonces si hubiera campo electrostático dentro del conductor, habría migración de cargas libres. Tal movimiento estaría animado por las fuerzas electrostáticas que el campo ejercería sobre dichas cargas. En conclusión, estaríamos en una situación no electrostática, en clara contradicción con la hipótesis de partida. Por lo tanto, estamos en condiciones de asegurar que el campo electrostático en el interior de un conductor, en condiciones electrostáticas, es nulo.

Por otra parte, dado que el campo electrostático puede derivarse siempre de un potencial, concluimos que el potencial electrostático dentro de un conductor (en las condiciones antes mencionadas) debe ser constante. Obsérvese en particular, que la superficie del conductor debe ser una superficie equipotencial. De esto último se deduce que el campo electrostático (que se desarrolla hacia afuera del conductor) debe ser localmente perpendicular a la superficie.

# 5 El fenómeno de inducción electrostática.

Se denomina inducción a la reorganización de cargas que tiene lugar en un conductor, cuando el mismo se encuentra bajo los efectos de un campo electrostático de origen externo. Para fijar ideas consideremos el ejemplo en que una esfera conductora neutra y aislada, se encuentra frente a una partícula que posee carga positiva. Aunque dentro de la esfera ocurrirá un único proceso relativamente complicado, nosotros podemos enumerar una serie de procesos simples que ayudarán a la comprensión del fenómeno en conjunto.

a) La partícula con carga positiva genera un campo electrostático que, en principio, ocupa todo el espacio circundante incluyendo el interior del conductor.

b) El gas de electrones libres del conductor es afectado por el campo externo, por lo que dichos electrones se mueven orientados por el campo hasta que cierta fracción de carga negativa alcanza la superficie.

c) La carga negativa acumulada en la superficie genera un campo electrostático adicional que se propaga tanto dentro como fuera del conductor.

d) El flujo de carga negativa hacia la superficie termina cuando el campo en el interior del conductor se hace nulo. Esto ocurre cuando la carga negativa residente en la superficie genera un campo que cancela en todos los puntos interiores al campo externo.

e) El gas de electrones remanente se redistribuye uniformemente en el interior del conductor. En estas condiciones, las cargas positivas y negativas de la parte volumétrica quedan descompensadas. Sobre la esfera reside una distribución volumétrica uniforme de carga positiva, que genera un campo electrostático radial (dirigido hacia afuera) en toda la región interna.

f) Nuevamente el gas de electrones libres es afectado por un campo electrostático que lo obliga a contraerse a un volumen ligeramente menor que el de la esfera. Tal contracción se detiene cuando la densidad de electrones aumenta hasta compensar la densidad de carga positiva.

g) La compensación de cargas debida a la contracción del gas de electrones, cancela nuevamente el campo interno. Como consecuencia de la contracción, aparece un delgado casquete de carga positiva no compensada, que admite ser modelado como una densidad superficial de carga positiva. La simetría del sistema permite inferir que tal distribución es uniforme.

h) Finalmente el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

Analicemos ahora la situación final. La carga macroscópicamente observable se encuentra distribuida en la superficie de la esfera. La densidad superficial de carga se compone de dos contribuciones cualitativamente diferentes. La primera es una distribución de carga negativa (en general asimétrica) debida directamente a la influencia del campo externo. La segunda es una distribución de carga positiva (en este caso simétrica), que se debe al reordenamiento de la carga remanente del conductor. Obsérvese que ambas distribuciones deben ser tales que el campo electrostático interno se anule.

Finalmente analicemos el campo electrostático externo. Recordemos que originalmente sólo existía el campo generado por la partícula de carga positiva. Ahora debemos agregar las contribuciones de las dos clases de carga que residen en la superficie.

# 6 Otra vuelta de tuerca sobre los mismos conceptos.

La secuencia detallada en la sección anterior, permite discriminar acerca de la "funcionalidad" de las dos distribuciones de carga que conviven en la superficie del conductor. La primera, negativa y asimétrica, es la encargada de garantizar la nulidad del campo electrostático interior "ante el intento invasivo del campo externo". Con esta mirada, podríamos decir que estas cargas inducidas son "centinelas" del conductor. Ellas están obligadas a permanecer en sus emplazamientos mientras el campo externo siga presente.

Por su parte, la carga remanente permanece ajena a la disputa. Ella se comporta como cualquier excedente de carga. Se sitúa en la superficie a expensas de sus interacciones múltiples, de modo de no afectar con su propio campo al volumen interior del conductor. Esta parte de la carga superficial es "transferible" por contacto a otros cuerpos. Asimismo, carga proveniente de otros cuerpos puede ser recibida y se reorganizarán sin perjuicio de las cargas centinelas. A todas estas cargas que se ponen en juego por contacto, las llamaremos "cargas circulantes", para diferenciarlas de las cargas centinelas que están obligadas a permanecer fijas.

Aún cuando todo el razonamiento anterior haya sido comprendido y aceptado, sobrevive una pregunta algo molesta: ¿Qué hubiera ocurrido si la partícula generadora del campo externo hubiese tenido carga negativa? Nuestro modelo microscópico nos dice que el razonamiento no puede ser análogo. En efecto, la diferencia de movilidad entre cargas positivas y negativas hace que el modelo no sea "simétrico" en su respuesta. Sin embargo, el modelo clásico admite tal simetrización. ¿Cómo salimos de este enriedo? Una idea muy viable consiste en suponer que el deficit de electrones de conducción en cualquier porción del conductor, pueda interpretarse como carga positiva. Y más aún, si las densidades de carga positiva fluctúan con el tiempo (procesos transitorios), podemos atribuir tales fluctuaciones al "flujo" de carga positiva entre diferentes partes del conductor. Así los dos modelos convergen, y podemos decir que las conclusiones alcanzadas para el caso de la partícula positiva son cualitativamente idénticas al caso de carga negativa. Sólo se requiere permutar los signos de las cargas[2].

# 7 Generalizaciones y resumen de propiedades.

Hasta este punto hemos presentado algunos modelos que facilitan la comprensión de los procesos internos en un conductor. Aunque los mismos fueron utilizados para analizar situaciones particulares, algunas conclusiones resultan de carácter general. En tal sentido, transcribimos aquí estas propiedades generales, apelando a la reflexión del lector en lo que concierne al alcance de las generalizaciones. Las propiedades que siguen valen para todos los conductores en condicones electrostáticas.

I) La carga macroscópicamente observable se aloja en la superficie del cuerpo.

II) El campo electrostático en el interior del cuerpo es nulo.

III) El potencial electrostático en el interior del cuerpo es constante, por lo que su superficie es equipotencial.

[2]El lector habrá advertido que la simetría entre los resultados no implica la simetría de los procesos. En efecto, un buen ejercicio podría ser que el estudiante imagine el proceso para el caso de carga negativa, según las pautas del modelo microscópico.

# 8 El electroscopio.

El electroscopio es un instrumento diseñado para detectar carga eléctica no compensada, residente en cuerpos macroscópicos. El mismo está formado por una pequeña esfera, una varilla de transmisión y dos ojuelas articuladas. Todas estas partes son conductoras y conectadas entre si (ver figura). Con excepción de la esfera, el resto de las partes se encuentra dentro de una cápsula de vidrio para evitar interacciones atmosféricas no deseadas.

Veamos como funciona el electroscopio. Comencemos por lo más simple que consiste en poner en contacto la esfera del instrumento con el cuerpo a medir. Si dicho cuerpo está cargado, transferirá una parte de su carga al electroscopio. Esta carga se distribuirá por la superficie de todo el cuerpo conductor que forma el instrumento, incluyendo las ojuelas metálicas articuladas. Estas últimas, al adquirir cargas del mismo signo se repelen entre si, separándose apreciablemente. Tal separación de las ojuelas se utiliza como recurso de visualización acerca de la carga residente en el instrumento.

Veamos ahora una situación algo más compleja. Si un electroscopio descargado se acerca (sin tocar) a un cuerpo cargado, se pone bajo la influencia de su campo electrostático. Entonces sobre la esfera ocurre el fenómeno de inducción. Esto es, cargas centinela neutralizan el campo interno, mientras un remanente de cargas circulantes se redistribuye por todo el cuerpo del electroscopio. Estas últimas alcanzan las ojuelas y se observa su separación. En tal sentido, decimos que el electroscopio funciona también como detector de campos electrostáticos.

# 9 Conexión a tierra.

Consideremos dos esferas conductoras idénticas y supongamos que una de ellas se encuentra inicialmente cargada mientras que la otra permanece neutra. Nos proponemos un análisis intuitivo acerca del estado final que alcanzarán las esferas si se las pone en contacto. Para ello retomamos nuestro modelo caricatura, ahora considerando dos pizzeras iguales. Para representar el contacto imaginamos que las pizzeras se tocan, y en el punto de contacto se hace un corte en las paredes, que permite el paso de pelotitas de ping pong de una pizzera a la otra. Supongamos que inicialmente en una de las pizzeras habían 21 pelotitas. Las mismas estarían uniformemente distribuidas sobre el borde y en equilibrio mecánico estable. Tal equilibrio se logra cuando la pared de la pizzera aporta una fuerza sobre cada pelotita, de igual módulo y sentido contrario a la que ejercen sobre ella las 20 restantes. Ahora bien, supongamos que una pelotita está justo en la puerta que conecta las dos pizzeras. Allí la pared no aporta su fuerza equilibrante, por lo que la pelotita es expulsada hacia la otra pizzera. Las 20 restantes se reordenan, y supongamos que una de ellas queda nuevamente en el punto de contacto. El proceso se repite. . .

Pero, ¿hasta cuándo seguirá este proceso? Supongamos que 10 pelotitas han pasado y la onceava está en puerta. Sobre ella ejercerán fuerzas las 10 que aún permanecen en la primera pizzera, pero también se harán notar las 10 que ya pasaron. La simetría del sistema garantiza que la suma de las fuerzas sobre la onceava pelotita es nula. Entonces el proceso se interrumpe, y más allá del hecho anecdótico de quién se quedará con la onceava pelotita, podemos decir que ambas pizzeras se habrán repartido las pelotitas en partes iguales.

Este análisis caricaturezco puede considerarse análogo al reparto de cargas entre dos esferas conductoras idénticas, que puestas en contacto adquirirán idénticas cantidades de carga. Pero ¿si las esferas no fueran iguales? O bien, ¿si las pizzeras no fueran iguales? Reflexionemos sobre esto. Consideremos la misma situación anterior, aunque ahora la pizzera inicialmente vacía tiene un radio mayor que la cargada. El proceso es escencialmente el mismo hasta que la onceava pelotita llega a la puerta. Ahora las interacciones no son simétricas, dado que las distancias son mayores en la pizzera grande. Por tanto la fuerza resultante sigue apuntando en el sentido que favorece la transferencia. Por supuesto, el proceso continuará hasta que las cantidades de carga de uno y otro lado equilibren la fuerza sobre la partícula en puerta. Así tendremos que el múmero de pelotitas finales será mayor en la pizzera más grande. Por extensión inmediata, diremos que si una esfera cargada se conecta con otra descargada de mayor radio, al final la carga se habrá repartido de modo que la mayor de las esferas tenga más carga que la otra.

Si existe un sistema que ha sido objeto de los más diversos modelados, ese sistema es nuestro nunca bien ponderado planeta. Desde el humillante modelo de partícula, hasta los complejos (pero no menos reduccionistas) modelos macroeconómicos, la tierra sigue adaptándose a las miradas científicas. Nosotros, para no ser menos, modelaremos la tierra como una gran esfera conductora neutra. Y lo interesante es que la tierra, conciente de nuestra necesidad académica, nos complace respondiendo razonablemente bien a tan extraño requerimiento[3].

Una vez admitido esto, es fácil imaginar lo que sucede si una esfera cargada, cuyo radio es del orden de nuestra escala cotidiana, se conecta a tierra. Simplemente, se descarga. En sentido esctricto, nuestro razonamiento anterior conduce a que la carga se repartirá entre la tierra y la esfera en partes de algún modo relacionadas con sus respectivos tamaños. De esto se desprende que, al resultar la esfera muy pequeña comparada con la tierra, la carga que puede retener en el proceso es despreciablemente pequeña.

Naturalmente, este razonamiento puede extenderse a cualquier cuerpo conductor de dimensiones del orden de nuestras escalas cotidianas. El proceso se denomina

[3]Valga esta pequeña humorada, para que el estudiante nunca olvide que todo cuanto especulamos se encuentra en el universo de los modelos. Será pues la naturaleza la que siempre tendrá la última palabra acerca de nuestras especulaciones.

conexión a tierra, y en todos los casos tiene como consecuencia la descarga del cuerpo, cualquiera que hubiera sido el signo de su carga.

# 10 Más sobre electroscópios.

Un procedimiento habitual con el electroscópio consiste en cargarlo a partir de la inducción. Veamos cuáles son los pasos:

a) En primer lugar, la esfera del electroscópio se pone bajo la influencia de un campo electrostático generado por cualquier objeto cargado (sin que se produzca el contacto). Entonces, sobre el instrumento aparecerán cargas centinela y el correspondiente remanente de cargas circulantes. Las primeras se sitúan en la esfera, mientras que las otras se distribuyen por toda la superficie metálica, dando lugar a la separación de las ojuelas. Observemos los signos. Las cargas centinelas son de signo opuesto al de la fuente del campo. Por su parte, las cargas circulantes tienen el mismo signo que dicha fuente.

b) En segundo lugar se establece la conexión a tierra del electroscópio. Esto puede hacerse simplemente tocando la esfera con la mano. En este proceso, las cargas circulantes abandonan el electroscópio y las ojuelas se juntan. Mientras tanto, las cargas centinela permanecen en sus lugares.

c) Finalmente, se retira la fuente del campo. Las cargas centinela quedan liberadas y constituyen un exceso neto de carga en el conductor. Entonces se distribuyen por toda su superficie, haciendo que las ojuelas se separen nuevamente. Nótese que el instrumento ha adquirido carga neta, y la misma es de signo contrario al de la fuente inductora.

# 11 Una mirada más formal sobre las esferas cargadas.

Hasta este punto, hemos visto intuitivamente que un exceso de carga residente en una esfera conductora, se distribuye uniformemente en su superficie. Dada la simetría de la distribución, es fácil reconocer, con ayuda de la ley de Gauss, que el campo electrostático exterior a la esfera, coincide con el de una partícula puntual que concentre la misma carga que la esfera y se situe en la misma posición de su centro. Se sigue de esto que el potencial asociado también corresponde al de una carga puntual. Entonces, si la esfera tiene radio $R$ y carga $Q$, tenemos

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \qquad V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad R < r \tag{3}$$

donde el cero de potencial se ha elegido en el infinito.

En particular, el campo electrostático justo afuera de la superficie, y el potencial sobre ella (y en todo su interior) serán

$$\vec{E}(r \to R^+) = \frac{kQ}{R^2}\,\breve{r} \qquad V(r = R) = \frac{kQ}{R} \tag{4}$$

La correspondiente densidad superficial de carga será

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{5}$$

Resulta interesante relacionar el campo electrostático justo afuera de la superficie de la esfera, con la densidad de carga residente en dicha superficie. Para ello combinamos las expresiones (4) y (5), con lo que obtenemos

$$\vec{E}(r \to R^+) = 4\pi k\sigma\breve{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{r} \tag{6}$$

Esta relación indica que el campo electrostático es proporcional a la densidad superficial de carga.

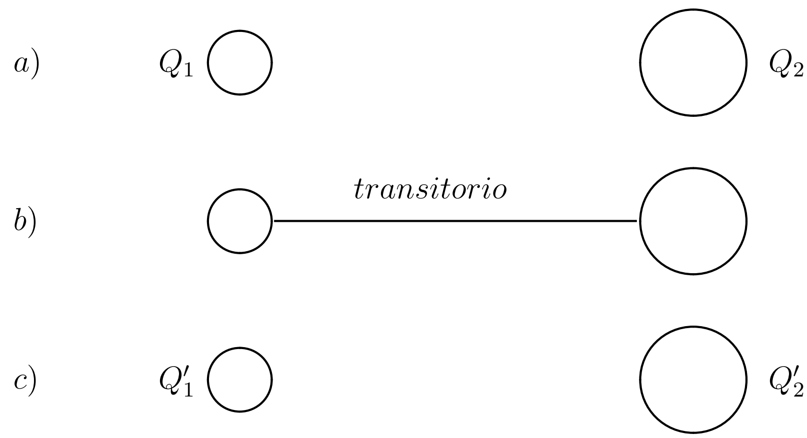
Analicemos ahora la conexión entre dos esferas cargadas. Supongamos que sus radios son $R_1$ y $R_2$ y sus cargas iniciales respectivas $Q_1$ y $Q_2$. Para que puedan despreciarse sus influencias mutuas, supongamos que las esferas están situadas en posiciones muy distantes. Entonces estamos en condiciones de hacer la conexión mediante un cable largo. Cuando se hace efectiva la conexión, ocurrirá un reordenamiento de cargas, hasta restituir el equilibrio electrostático. Dicho equilibrio se dará cuando ambas esferas alcancen el mismo potencial[4]. Una vez concluido el proceso transitorio, retiramos el cable. Denotaremos con letras primadas las magnitudes correspondientes al estado final. En la figura esquematiza la secuencia de pasos. De la conservación de la carga tenemos

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \tag{7}$$

De la igualdad de los potenciales tenemos

$$V_1' = V_2' \qquad \to \qquad \frac{kQ_1'}{R_1} = \frac{kQ_2'}{R_2} \qquad \to \qquad \frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{R_1}{R_2} \tag{8}$$

[4]Esto debe darse porque el cable junto con las dos esferas, mientras dura la conexión, constituyen un único conductor. Por tanto, el potencial debe ser el mismo en todas las partes.




Obsérvese que esta conclusión coincide con la idea intuitiva desarrollada en secciones anteriores. Pero ahora tenemos presición: El cociente entre las cargas es igual al cociente entre los radios respectivos. Veamos qué sucede con las densidades.

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2}\frac{4\pi R_2^2}{Q'_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{9}$$

Entonces, el cociente entre las densidades superficiales de carga es igual a la inversa del cociente de los radios respectivos. Esto significa que, una vez restituido el equilibrio electrostrático, la esfera de menor radio tendrá menor carga, pero mayor densidad superficial de carga y mayor módulo del campo electrostático justo afuera de la superficie.

# 12 Condiciones de contorno.

Cuando existe una superficie límite entre dos medios cualitativamente diferentes, decimos que la misma es una frontera o un contorno. Las condiciones de contorno en sentido físico, son propiedades de los campos (escalares o vectoriales) que, de acuerdo con las características de los medios en contacto, pueden deducirse a priori. Entonces, tales condiciones pueden imponerse en los cálculos, muchas veces como recurso indispensable para ciertas resoluciones.

En nuestro caso particular, estudiamos la superficie límite entre el vacio y un medio conductor[5].

[5]Es habitual referirse a las superficies límite entre dos medios como interfaces. Observe que en singular la palabra es interfaz, la que podría interpretarse como “cara intermedia”. Hacemos

Según hemos discutido ya ampliamente, el campo electrostático dentro de un conductor en equiliblibrio electrostático es nulo. Por esto, su volumen es equipotencial y, en particular su superficie también lo es. Entonces la condición de contorno para el potencial es

$$V\left(\vec{r}_s\right) = V_0 \quad (constante) \tag{10}$$

donde $\vec{r}_s$ representa cualquier punto de la superficie del conductor.

Por su parte, las condiciones para el campo electrostático pueden sintetizarse como sigue

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{r}_s^{\,1}\right) &= \tfrac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}\breve{n} \\ \vec{E}\left(\vec{r}_s^{\,2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

donde $\vec{r}_s^{\,1}$ y $\vec{r}_s^{\,2}$ son posiciones justo afuera y justo adentro de la frontera respectivamente, en inmediaciones del punto $\vec{r}_s$, mientras que $\breve{n}$ es el versor normal exterior a la frontera en $\vec{r}_s$.

# 13 Más generalizaciones y resumen de propiedades.

Los tratamientos de las secciones anteriores, admiten ser generalizados, para cuerpos conductores de formas arbitrarias. Sin embargo, la complejidad matemática de tales generalizaciones nos impide abordarlas en este contexto. Por tanto nos restringiremos a enunciar, sin demostración, algunas propiedades generales que se agregan a la lista dada en la sección 7. Naturalmente, sugerimos que el lector reflexione sobre la consistencia de estos enunciados con los casos particulares tratados.

IV) La densidad superficial de carga es tanto mayor, cuanto menor sean los radios de curvatura de la superficie.

V) El campo electrostático justo al lado de la superficie es proporcional a la densidad de carga residente en ese lugar de la superficie. La relación es

$$\vec{E}(\vec{r}_s^{\,+}) = 4\pi k\sigma(\vec{r}_s)\breve{n} = \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}\breve{n} \tag{12}$$

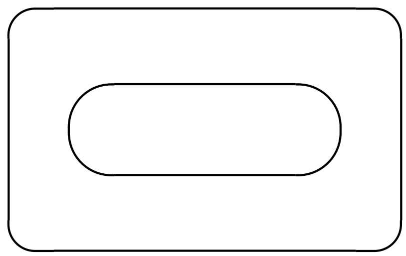
donde $\vec{r}_s$ es una posición sobre la superficie, $\vec{r}_s^{\,+}$ es un punto infinitesimalmente proximo a $\vec{r}_s$ justo afuera de la superficie, y $\breve{n}$ es un versor normal exterior a la superficie en el punto $\vec{r}_s$.

esta aclaración porque probablemente la palabra proviene de traducciones del inglés, y podría confundirse con "interfase" ("s" en lugar de "c"), que significa "intermedio entre dos fases" en terminología química.

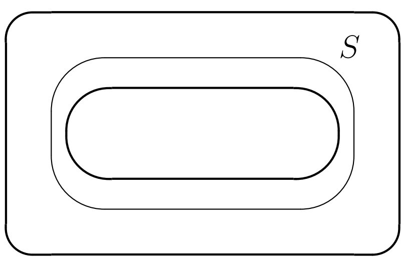
# 14 Cavidades de paredes conductoras. Blindaje.

Consideremos una cavidad cerrada de forma arbitraria que se encuentra dentro de un conductor (figura $a$). Supongamos que la cavidad no aloja cargas en su volumen, mientras que cierto exceso de carga se encuentra en el conductor. Como ya sabemos, la carga se distribuirá sobre la superficie del conductor. Pero ahora el conductor tiene superficie de afuera y superficie de adentro. Entonces nos preguntamos ¿Habrá carga distribuida en la superficie de adentro? ...

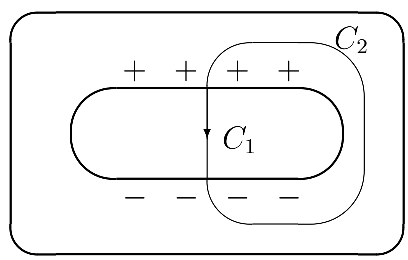
$a)$



$b)$




$c)$




Comencemos el análisis eligiendo una superficie cerrada $S$ imaginaria completamente contenida en la parte material del cuerpo (ver figura $b$). Esto es, que no asoma ni fuera del conductor ni dentro de la cavidad. Entonces si aplicamos la ley de Gauss sobre $S$ tenemos

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \;=\; \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} r \qquad (13)$$

La integral es nula porque el campo es nulo sobre toda la superficie $S$. Entonces la carga $Q_{RS}$ alojada en el interior de $S$ también debe ser nula. Como no hay carga en la cavidad (por hipótesis), ni la puede haber en la parte maciza del conductor, concluimos que la carga neta sobre la superficie de la cavidad es nula.

El lector puede estar tentado de pensar que la pregunta ha sido contestada. Sin embargo, cabe una sutileza; ¿No podría ocurrir que en la superficie de la cavidad haya una región con carga positiva y otra región con carga negativa, tal que la carga total sea nula? En principio, el razonamiento anterior no permite descartarlo, y por tanto debemos indagar sobre esta posibilidad.

Nuestra estrategia consiste en razonar por el absurdo. Supongamos que efectivamente existe una distribución superficial de cargas en la frontera de la cavidad (ver figura $c$). Como la carga total debe ser nula, habrá una región con carga positiva y otra región con carga negativa. Entonces, en el interior de la cavidad habrá líneas de campo que comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Elijamos una de dichas líneas, identificándola como el tramo de curva $C_1$. Luego, imaginamos un segundo tramo de curva $C_2$, cuyos puntos extremos coinciden con los extremos de $C_1$, pero se desarrolla dentro de la parte maciza del conductor. Observe que la unión de $C_1$ y $C_2$ constituye una curva cerrada, a la que llamaremos $C$. Entonces, como el campo electrostático es conservativo, debe cumplirse que

$$C = C_1 U C_2 \qquad \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \; = \; \int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; + \; \int_{C_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; = \; 0 \tag{14}$$

La integral sobre $C_2$ es nula por ser nulo el campo $\vec{E}$ dentro del conductor. Entonces

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; = \; 0 \tag{15}$$

Para analizar la integral sobre $C_1$ comencemos por reconocer que $\vec{E}$ sobre una línea de campo nunca se invierte. Es decir que el campo siempre apunta en el sentido en que se recorre la curva desde la carga positiva hacia la carga negativa. Si adoptamos esta misma orientación para los vectores diferenciales $\vec{dl}$, observamos que la integral sobre $C_1$ suma sobre términos estrictamente positivos. Por tanto la integral resulta estrictamente positiva. Esto es

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; > \; 0 \tag{16}$$

Las expresiones (**??**) y (**??**) son claramente contradictorias. Dicha contradicción proviene de suponer que existe carga distribuida en la superficie de la cavidad. Por tanto, hemos probado que, bajo las hipótesis propuestas, no habrá carga distribuida en las superficies de cavidades cerradas.

El análisis anterior es válido para el caso en que un exceso de carga reside en el conductor. Ahora bien, tal exceso puede ser un exceso neto debido al agregado o sustracción de electrones de conducción. Pero también puede aplicarse al caso de las cargas circulantes en el proceso de inducción. Cuando este es el caso, se que el conductor sive de “blindaje” a la cavidad. Esta terminología responde a que el campo externo no puede “propagarse” dentro de la cavidad, impedido por el recubrimiento del conductor. Esta propiedad es apmpliamente utilizada como recurso tecnológico para blindar instrumentos que pudieran ser afectados por campos eléctricos externos. Aunque el análisis fue realizado para una cavidad cerrada, los blindajes funcionan aún cuanlo el conductor no rodea completamente la región a proteger. Estos blindajes abiertos se conocen como “jaulas de Faraday”, y constituyen una estensión (no tan inmediata) de los conceptos explicados.

## 15 Efecto de puntas.

Cuando un conductor de forma arbitraria posee un exceso de carga eléctrica, dicho exceso se reparte en su superficie. La densidad superficial de carga en general no será uniforme, a menos que el cuerpo sea altamente simétrico. Lo que siempre ocurrirá es que el cuerpo sea un volumen equipotencial. Un ejemplo de ello, es el cuerpo formado por las dos esferas del apartado 11, cuando las mismas están conectadas mediante un conductor. Según la relación (9), las densidades superficiales en cada esfera están en relación inversa a sus respectivos radios.

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_1' R_1 = \sigma_2' R_2 \tag{17}$$

Esta relación puede interpretarse (en un sentido no estricto), como que el producto de la densidad superficial de carga por el radio de curvatura local de la superficie es una constante sobre toda la superficie del cuerpo[6]. Así tendremos que la mayor densidad de carga estará en los lugares donde la curvatura de la superficie sea más pequeña.

En particular, las puntas poseen radios de curvatura extremadamente pequeños, por lo que las densidades de carga en ellas son muy grandes. Por ejemplo, si un cubo metálico macizo posee un exceso de carga, sus vértices presentaran la maxima densidad de carga. En menor grado abra carga en las aristas, y por último podrá haber una densidad muy baja en las caras. Esta propiedad selectiva de la carga en relación con su distribución en la superficie de los conductores da lugar al llamado efecto de puntas.

[6]El caracter informal de esta relación reside en que no es posible ajustar una forma arbitraria de superficie localmente con una esfera, salvo en casos excepcionales. En general esto podrá hacerse con un elipsoide, por lo que debieran especificarse dos radios en lugar de uno para definir la curvatura.