Capítulo 8
Magnetostática.

1 Una mirada sobre la historia.

La palabra “magnetismo” evoca la antigua ciudad tesalonicense de Magnesia, en la mesopotamia asiática. Según registros provenientes de la Grecia antigua, en la citada ciudad se conocían rocas, cuyas extrañas propiedades eran semejantes a las de los imanes actuales. Lo extraño era que tales propiedades eran “naturales” en estas rocas. Este parece ser el inicio histórico del conocimiento acerca del magnetismo. Tales de Mileto y, probablemente, Sócrates se ocuparon del tema, y elaboraron algunas especulaciones (por supuesto a la manera griega[1]).

Por su parte, los chinos también conocieron esta fenomenología. A ellos se les atribuye la primera observación del magnetismo terrestre, y su conexión con la orientación de objetos magnéticos. Tanto en Grecia como en China, parece que este conocimiento fue adquirido algunos siglos antes de Cristo.

El primer objeto verdaderamente trascendental que aportó el magnetismo, fue la “brujula”. Bastará evaluar el cambio operado en la navegación a partir de su implementación, para estimar su importancia. Tal vez, podríamos situar el nacimiento de la brújula como un hito histórico, en el que se sintetiza el valor de las conexiones surgidas de la observación cuidadosa de hechos naturales. Esto no es trivial; y cuanto más conocimiento haya sobre los fenómenos físicos, más se amplía el horizonte de tales conexiones. “Pero hay que descubrirlas”.

Retomemos el hilo de la historia. El estado actual de conocimiento sobre el magnetismo, revela que la ventana que se abrió en Magnesia, dejaba ver muy poco de lo que habría dentro del basto laberinto. Es cierto también que las ventanas que se abren serán siempre un buen augurio, pero en este caso no se pudo ver, sino hasta dos mil años después, el segundo capítulo de la historia. ¿Casualidad o no? no lo sabremos. Pero un día en que los tránsitos de corriente eléctrica a través de conductores ya eran frecuentes, ocurrieron simultáneamente dos cosas: La primera fue que una brújula yacía cerca de un conductor, en el preciso momento en que cirlulaba por él una corriente. La segunda fue que alguien con capacidad de asombro y discernimiento, lo observó. Aquí surgió la clave de la concepción actual

[1] No quisiera que el lector tome esta aclaración en un sentido que induzca a la desvalorización del pensamiento antiguo. En tal caso léase que los griegos vivieron mucho antes de los inicios de la ciencia moderna, por lo que sus formas de concebir la naturaleza estaba muy lejos de nuestro modo de pensar. Creo oportuno enfatizar aquí, que el pensamiento científico “debe” nutrirse de todas las vertientes, cosa que afortunadamente ha ocurrido con el legado de la Grecia antigua.

del magnetismo. Los trabajos de H. C. Oersted en 1820 establecieron la conexión entre fenónemos eléctricos y magnéticos, y desde entonces comenzó a vislumbrarse la posibilidad de una teoría unificada que vinculara ambas interacciones. En la década de 1860 se alcanzó la unificación en lo que se dio en llamar "teoría electromagnética clásica", de la cual nos ocuparemos más adelante.

2 Corriente eléctrica y campo magnético.

La concepción actual acerca del magnetismo consiste en que tal interacción se dará entre dos partículas dotadas de carga eléctrica, cuando cada una de ellas se encuentre en movimiento. En tal sentido, diremos que las partículas involucradas interactúan mediante dos mecanismos que dan lugar a fuerzas bien diferenciables: la eléctrica y la magnética.

Puede que al lector le resulte algo extraño que la interacción magnética dependa del movimiento, especialmente pensando en el carácter relativo de este último. Si esto es así, resultará que ciertos observadores notarán la interacción magnética (los que ven moverse ambas partículas), mientras que otros observadores no notarán la interacción (los que ven al menos una de las partículas en reposo). La verdad es que suena raro. Pero las evidencias mandan, y se han requerido mentes brillantes (y especialmente abiertas) para construir un marco teórico que respalde esta rareza (y otras tantas). La teoría moderna de la relatividad, que viera la luz hacia 1905 a partir de los trabajos de A. Einstein, tuvo entre sus objetivos originales, la misión de dar sustento "mecanico" a las extrañas conclusiones que surgían del electromagnetismo.

De la misma manera que la interacción eléctrica, la interacción magnética puede ser tratada como un campo. En efecto, puede definirse un "campo magnético" que, en general, dependerá de la posición y del tiempo. Sus fuentes serán las cargas en movimiento, ya sea individualmente o en la forma colectiva habitual de corrientes eléctricas. ¿Sobre qué se hará notar? Sobre otras cargas en movimiento (o corrientes). El campo magnético es una propiedad acechante del espacio, que "habita" en el espacio esperando que partículas viajeras pasen bajo su influencia.

3 Magnetostática. Ley de Biot-Savart.

La magnetostática constituye el estudio de las interacciones magnéticas, que pueden ser representadas por campos magnéticos independientes del tiempo. Esto sólo puede darse cuando las fuentes del campo son corrientes "estacionarias". Esto es, corrientes que no dependen del tiempo. Los campos que pueden encuadrarse en este requerimiento son los que surgen de la ley de Biot-Savart, que enunciamos a continuación.

Consideremos una región del espacio en que existe una distribución de corriente estacionaria, cuya densidad volumétrica es $\vec{J}(\vec{r'})$. Supongamos que la misma da origen a un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ que ocupa la misma región. Entonces, el elemento de corriente que ocupa el volumen infinitesimal dv situado en $\vec{r'}$, contribuye con un aporte $d\vec{B}$ al campo magnético en el punto $\vec{r}$ dado por

$$d\vec{B}(\vec{r}) \;=\; k' \, \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|^2} \;\times\; \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|} \, dv \tag{1}$$

donde la constante k' en el sistema MKS vale

$$k' \;=\; 10^{-7} \frac{Tm}{A} \tag{2}$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Biot-Savart, que admite ser integrada directamente por aplicación del principio de superposición. Así tendremos

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; k' \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|^2} \;\times\; \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|} \, dv \tag{3}$$

donde D representa el dominio donde hay corrientes.

Expresión de bolsillo: Una forma de recordar la ley de Biot-Savart consiste en definir un vector $\vec{u}$ como sigue

$$\begin{aligned} \vec{u} \;&=\; \vec{r} - \vec{r'} \\ u \;&=\; \left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right| \end{aligned} \qquad\qquad \breve{u} \;=\; \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|} \tag{4}$$

con lo que obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; k' \int_D \frac{\vec{J} \times \breve{u}}{u^2} \, dv \tag{5}$$

Nunca será suficiente insistir en que esta expresión “no es” la ley de Biot-Savart, sino un ayuda memoria para “construir” la expresión correcta.

4 Circuitos como fuentes de campo magnético.

Muchas veces el campo magnético se origina por la circulación de corriente estacionaria en un circuito. Supongamos que el conductor que forma el circuito es suficientemente delgado, comparado con las dimensiones generales del circuito, y que no resulta de interés el campo magnético “dentro” del conductor. Entonces podemos modelar la distribución de fuentes como una curva sobre la que circula una corriente única. Sea C una curva cerrada que representa la forma del circuito, y sea I la corriente que circula por el circuito. Entonces la ley de Biot-Savart toma la forma simplificada siguiente

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; k' \int_C \frac{I\vec{dl}(\vec{r'})}{\left|\, \vec{r}-\vec{r'} \,\right|^2} \;\times\; \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{\left|\, \vec{r}-\vec{r'} \,\right|} \tag{6}$$

donde $\vec{dl}$ es un elemento infinitesimal de la curva C, orientado en el sentido en que circula la corriente.

5 Ejemplo 1: Campo magnético en el eje de una espira circular.

Una espira es un anillo de alambre (conductor), cuyo radio R es mucho mayor que el diámetro de la sección transversal del alambre. Supongamos que por la espira circula una corriente estacionaria I. Buscaremos ahora el campo magnético $\vec{B}$ en un punto del eje de simetría de la espira. Para ello, situamos el origen de coordenadas en el centro de la espira, y orientamos el eje z a lo largo del eje. Entonces el punto campo será $\vec{r} = (0, 0, z)$. Argumentos de simetría permiten reconocer que las componentes del campo $\vec{B}$ perpendiculares al eje z son nulas.

$$B_x \;(\; 0,0,z \;) \;=\; B_y \;(\; 0,0,z \;) \;=\; 0 \tag{7}$$

Este es un problema que admite varios caminos para su resolución. Aquí no elegimos el más simple o directo, sino el que nos enseña un poco del manejo formal de vectores. Comencemos por edentificar los vectores requerido en la ley de biot-Savart. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en sentido antihorario, cuando miramos la espira desde un punto situado en el semieje positivo de z.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0,0,z) \\ \vec{r'} &= (\; R\cos(\theta'), R\sin(\theta'), 0 \;) \\ \vec{dl} &= (\; -R\sin(\theta')d\theta', R\cos(\theta')d\theta', 0 \;) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{r}-\vec{r'} &= (\; -R\cos(\theta'), -R\sin(\theta'), z \;) \\ \left|\, \vec{r}-\vec{r'} \,\right| &= \sqrt{R^2+z^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Una versión levemente modificada de la ley de Biot-Savart escrita en la componente z, viene dada por

$$B_z\,(\; 0,0,z \;) \;=\; k'I \int_C \frac{\left[\vec{dl}\left(\vec{r'}\right) \times \left(\; \vec{r}-\vec{r'} \;\right)\,\right]_z}{\left|\, \vec{r}-\vec{r'} \,\right|^3} \tag{9}$$

Analicemos el producto vectorial

$$\left[\, \vec{dl} \times \left(\,\vec{r} - \vec{r'}\, \right) \right]_z \;=\; \left| \begin{array}{ccc} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -R\sin(\theta')d\theta' & R\cos(\theta')d\theta' & 0 \\ -R\cos(\theta') & -R\sin(\theta') & z \end{array} \right|_z \;=\; R^2 d\theta' \qquad (10)$$

Reemplazando en la integral tenemos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; k'I \int_0^{2\pi} \frac{R^2\; d\theta'}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}} \;=\; \frac{k'IR^2}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \; d\theta' \qquad (11)$$

Con lo que finalmente tenemos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k'IR^2}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}} \qquad (12)$$

Insistimos en que este resultado puede obtenerse de formas más simples, por lo que sería muy provechoso que el estudiante intente otras variantes. Usted tendrá aquí la ventaja de saber de antemano el resultado. Pocas veces uno tiene este privilegio, por lo que la sugerencia es que no pierda la oportunidad de probar.

6 Ejemplo 2: Campo magnético en el eje de un solenoide.

Un solenoide es un arrollamiento de espiras apretadas sobre un soporte cilíndrico. Este arrollamiento suele construirse con alambre de cobre, que posee un esmaltado como recurso de aislación. Gracias a dicho esmaltado, es posible poner las espiras en contacto mecánico, sin que ocurra el contacto eléctrico. El soporte cilíndrico puede omitirse en el modelo, salvo que sus propiedades magnéticas sean relevantes.

Ahora modelamos. Dado que conocemos el campo magnético producido por una única espira, es factible pensar al solenoide como una colección secuencial de N espiras de radio R, que forman una "superficie" cilíndrica de longitud l. Supongamos que el origen de coordenadas está exactamente en el punto campo, y que el eje z corre a lo largo del eje de simetría del solenoide. Como las espiras son "coaxiales", la suma de sus contribuciones al campo magnético sólo tendrá componente z. Esto es

$$B_x\;\;(\,0,0,0\,) \;=\; B_y\;\;(\,0,0,0\,) \;=\; 0 \qquad (13)$$

Consideremos las espiras que se encuentran en el intervalo comprendido entre z' y $z' + dz'$. Su contribución a la componente z en el origen será.

$$dB_z\,(\,0,0,0\,) \;=\; \frac{2\pi k'R^2}{(\,R^2+z'^2\,)^{3/2}} \left(\frac{IN\;dz'}{l} \right) \qquad (14)$$

donde la expresión entre paréntesis representa la parte proporcional de la corriente total del solenide, que queda comprendida en el intervalo citado. El problema se resuelve formalmente integrando esta expresión. Así tenemos

$$B_z\,(\,0,0,0\,)\;=\;\frac{2\pi k' I N R^2}{l}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz'}{(\,R^2+z'^2\,)^{3/2}} \tag{15}$$

Esta integral puede resolverse mediante una sustitución trigonométrica. Para ello, conviene escribir la integral como sigue

$$B_z\,(\,0,0,0\,)\;=\;\frac{2\pi k' I N}{l}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\frac{dz'}{R}}{\left[\,1+\left(\frac{z'}{R}\right)^2\,\right]^{3/2}} \tag{16}$$

Luego proponemos la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z'}{R}\;=\;tg(u)\qquad\longrightarrow\qquad\frac{dz'}{R}\;=\;\frac{du}{\cos^2(u)} \tag{17}$$

con lo que la integral toma la forma

$$B_z\,(\,0,0,0\,)\;=\;\frac{2\pi k' I N}{l}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{[\,1+tg^2(u)]^{3/2}\,\cos^2(u)} \tag{18}$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1+tg^2(u)\;=\;1+\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}\;=\frac{\cos^2(u)+\sin^2(u)}{\cos^2(u)}\;=\frac{1}{\cos^2(u)} \tag{19}$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$B_z\,(\,0,0,0\,)\;=\;\frac{2\pi k' I N}{l}\int_{u_1}^{u_2}\cos(u)\,du\;=\;\frac{2\pi k' I N}{l}\;[\sin(u_2)-\sin(u_1)] \tag{20}$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida (aunque ya la habíamos recordado algún tiempo atrás)

$$\sin(u)\;=\;\frac{tg(u)}{\sqrt{1+tg^2(u)}} \tag{21}$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(u)\;=\;\frac{\frac{z'}{R}}{\sqrt{\,1+\left(\frac{z'}{R}\right)^2}}\;=\;\frac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}} \tag{22}$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$B_z\,(\,0,0,0\,)\;=\;\frac{2\pi k' I N}{l}\left(\frac{z_2'}{\sqrt{R^2+{z_2'}^2}}\;-\;\frac{z_1'}{\sqrt{R^2+{z_1'}^2}}\right) \tag{23}$$

Ahora analicemos esta expresión. El punto donde calculamos el campo es el origen, mientras que z'_1 y z'_2 son las posiciones relativas de los extremos del solenoide, respecto al origen. Esta es una manera rara de trabajar, por que cada vez que queremos saber el campo de inducción magnética en un punto, hay que correr el origen. Bueno, reconozcamos que la metodología nos facilitó "algo" la cuenta. Pero ahora queremos tener una función de la posición y no parece ser muy dificil. Elijamos pues un origen fijo, por ejemplo, en el centro del solenoide. Entonces los extremos estarán en $-l/2$ y $l/2$. Entonces, para un detector colocado sobre el eje, en una posición z respecto del origen tendremos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N}{l} \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - z\right)^2}} - \frac{-\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{l}{2} - z\right)^2}} \right] \tag{24}$$

o bien

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N}{l} \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + z\right)^2}} \right] \tag{25}$$

7 Fuerza magnética.

Hasta este punto nos ocupamos de la producción de campos de inducción magnética, a partir de corrientes estacionarias. Ahora abordaremos la descripción de los efectos que tienen lugar cuando estos campos influyen sobre partículas en movimiento. Comencemos por suponer que en cierta región del espacio existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ estacionario. Si en dichas región viaja una partícula de carga Q, con velocidad $\vec{v}$, el campo ejercerá una fuerza $\vec{F}$ sobre ella, dada por

$$\vec{F} \;=\; Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{26}$$

Esta es la fuerza magnética o fuerza de Lorentz. Algunos detalles saltan a primera vista. Note que la fuerza es perpendicular a la velocidad, y por tanto, al desplazamiento. Inmediatamente se sigue que la fuerza magnética no puede realizar trabajo sobre las partículas que se mueven bajo su influencia. El teorema de trabajo y energía nos permite concluir que, si la partícula está exclusivamente afectada por fuerzas magnéticas, su energía cinética se mantendrá invariante. En otras palabras, las fuerzas magnéticas pueden alterar la dirección de la velocidad de la partícula, pero no su módulo.

Ahora centraremos la atención en el caso en que las partículas cargadas viajan por un conductor largo de pequeña sección, dando lugar a una corriente eléctrica. Aquí las interacciones microscópicas entre los electrones de conducción y los iones fijos de la red que forma el soporte sólido, hacen que la fuerza se manifieste directamente como un efecto macroscópico sobre el conductor. Supongamos nuevamente que un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ ha sido establecido, en la región del espacio en la que yace un conductor por el que circula corriente I. Sea $\vec{dl}$ en elemento de la curva que describe el conductor, orientado en el sentido de circulación de la corriente. Entonces, la fuerza que "ejerce el campo" sobre el elemento de conductor que se encuentra sobre el tramo de curva dl viene dada por

$$d\vec{F} \;=\; I\vec{dl} \times \vec{B} \tag{27}$$

La fuerza total sobre el conductor se obtiene por integración sobre la curva que contiene al circuito.

$$\vec{F} \;=\; \int_C I\vec{dl} \times \vec{B} \tag{28}$$

Es interesante notar que, aunque la curva que contiene a un circuito es cerrada, no hemos utilizado la notación para integrales cerradas. Esto se debe a que generalmente es de interés la fuerza magnética que actúa sobre un tramo del circuito, y no sobre el circuito completo.

8 Ejemplo 1: Órbitas en campos uniformes.

Supongamos que un campo de inducción magnética uniforma $\vec{B} - 0$ ocupa todo el espacio. Para fijar ideas, supongamos que el mismo está orientado en el sentido positivo del eje z. Por otra parte, supongamos que una partícula de masa m y carga Q, es lanzada con velocidad inicial $\vec{v}_0$, desde el origen de coordenadas. Entonces los vectores involucrados son

$$\vec{B}_0 \;=\; (\; 0, 0, B_0 \;) \qquad\qquad \vec{r}_0 \;=\; (\; 0, 0, 0 \;) \qquad\qquad \vec{v}_0 \;=\; (\; v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} \;) \tag{29}$$

Combinando la fuerza de Lorentz con la segunda ley de Newton, tenemos

$$\vec{F} \;=\; Q\vec{v} \times \vec{B}_0 \;=\; m\vec{a} \tag{30}$$

donde $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son los vectores que representan instantáneamente la velocidad y aceleración de la partícula. Desarrollemos

$$\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ Qv_x & Qv_y & Qv_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \;=\; m \;(\; a_x, a_y, a_z \;) \tag{31}$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} QB_0 \; v_y &= m \, \tfrac{dv_x}{dt} \\ -QB_0 \; v_x &= m \, \tfrac{dv_y}{dt} \\ 0 &= m \, \tfrac{dv_z}{dt} \end{aligned} \tag{32}$$

La tercera de las ecuaciones tiene una solución inmediata. Ya que se trata de una derivada primera igualada a cero, tenemos que la velocidad mantendrá constante la componente z, es decir, la componente paralela al campo $\vec{B}_0$. Aplicando las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} v_z(t) &= v_{0z} \; (constante) \\ z(t) &= v_{0z}t \end{aligned} \tag{33}$$

Las otras dos ecuaciones pueden desacoplarse derivándolas y reemplazando

$$\begin{aligned} -\left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; v_x &= \tfrac{d^2 v_x}{dt^2} \\ -\left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; v_y &= \tfrac{d^2 v_y}{dt^2} \end{aligned} \tag{34}$$

Cada una de estas ecuaciones diferenciales puede ser resuelta por separado. Como la velocidad es la derivada primera de la posición respecto del tiempo, la primera integración es directa. Administrando cuidadosamente las constantes, tenemos

$$\begin{aligned} -\left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; (x - x_c) &= \tfrac{d^2 x}{dt^2} \\ -\left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; (y - y_c) &= \tfrac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned} \qquad o \; bien \qquad \begin{aligned} \tfrac{d^2(x-x_c)}{dt^2} + \left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; (x - x_c) &= 0 \\ \tfrac{d^2(y-y_c)}{dt^2} + \left(\tfrac{QB_0}{m}\right)^2 \; (y - y_c) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

dondeD x_C e y_C son constantes de integración a determinar. Las formas de la derecha han sido incorporadas para que el estudiante recuerde los osciladores armónicos. En efecto, ellos tenían la misma ecuación diferencial, y por tanto, la misma clase de soluciones. Entonces no hace falta calcular. Simplemente escribinos las soluciones y sus derivadas primeras, que serán útiles después

$$\begin{aligned} x - x_C &= A_x \; \sin(\omega t + \phi_x) \\ v_x &= A_x\omega \; \cos(\omega t + \phi_x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y - y_C &= A_y \; \sin(\omega t + \phi_y) \\ v_y &= A_y\omega \; \cos(\omega t + \phi_y) \end{aligned} \tag{36}$$

donde las amplitudes A_x y A_y, junto con las fases iniciales ϕ_x y ϕ_y son constantes a determinar, mientras que la frecuencia angular ω es la misma en ambas soluciones y vale

$$\omega = \frac{QB_0}{m} \tag{37}$$

En el instante inicial tendremos

$$\begin{aligned} -x_C &= A_x \; \sin(\phi_x) \\ v_{0x} &= A_x\omega \; \cos(\phi_x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -y_C &= A_y \; \sin(\phi_y) \\ v_{0y} &= A_y\omega \; \cos(\phi_y) \end{aligned} \tag{38}$$

El panorama podrá resultar algo desalentador, si observamos que disponemos de cuatro condiciones iniciales y seis constantes a determinar. Pero no hay que alarmarse, especialmente si recordamos que las fuerzas magnéticas, cuando actúan solas, cuidan de no cambiar la energía cinética. Esto puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{2}m \left[v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \right] = \frac{1}{2}m\omega^2 \left[A_x^2 \cos^2 (\omega t + \phi_x) + A_y^2 \cos^2 (\omega t + \phi_y) \right] \tag{39}$$

Esta expresión merece una atención muy especial, porque probablemente nunca hayamos tratado algo parecido. Comencemos por observar que el primer miembro es constante, mientras que el segundo es una función del tiempo. Como la igualdad debe cumplirse para todo tiempo t, el corchete del segundo miembro debe ser constante. Esto sólo puede lograrse haciendo

$$A_y = A_x \quad y \quad \cos (\omega t + \phi_y) = \sin (\omega t + \phi_x) = \cos\left(\omega t + \phi_x - \frac{\pi}{2} \right) \tag{40}$$

de donde se concluye que

$$\phi_y = \phi_x - \frac{\pi}{2} \tag{41}$$

Para simplificar la notación hacemos $A = A_x$ y $\phi = \phi_x$, con lo que las condiciones iniciales toman la forma

$$\begin{array}{ll} -x_C = A \sin(\phi) & y_C = A \cos(\phi) \\ v_{0x} = A\omega \cos(\phi) & v_{0y} = A\omega \sin(\phi) \end{array} \tag{42}$$

Ahora si tenemos cuatro ecuaciones y cuatro constantes a determinar. Con un poco de trabajo llegamos a

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \qquad \phi = arctg\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) \qquad \begin{array}{r} x_C = -A \sin(\phi) \\ y_C = A \cos(\phi) \end{array} \tag{43}$$

Con esto quedan completamente caracterizadas las funciones del tiempo que describen la posición de la partícula. Las pasamos en limpio para analizarlas.

$$\begin{array}{l} x - x_C = A \sin(\omega t + \phi) \\ y - y_C = A \cos(\omega t + \phi) \\ z = v_{0z}t \end{array} \tag{44}$$

Entre las dos primeras funciones podemos eliminar el tiempo para tener una idea de la trayectoria. Para ello, elevamos al cuadrado ambas funciones, y luego las sumamos. Así obtenemos

$$(x - x_C)^2 + (y - y_c)^2 = A^2 \tag{45}$$

Esta es la relación funcional que define una circunferencia de radio A, centrada en (x_C, y_C). Observando que el movimiento contiene además un desplazamiento uniforme en z, concluimos que la órbita será una hélice de paso constante alrededor de un eje paralelo al campo $\vec{B}_0$ que pasa por (x_C, y_C). La misma se desarrolla sobre una superficie cilíndrica de radio A.

9 Las leyes integrales de la magnetostática.

Cuando tratamos la electrostática, analizamos el comportamiento del campo $\vec{E}$ bajo dos miradas integrales. En la ley de Gauss estudiamos el flujo de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie cerrada. Luego, vimos que también resultaba conservativo al analizar la circulación sobre cualquier curva cerrada. Ahora mos proponemos hacer los mismos análisis sobre el campo de inducción magnética $\vec{B}$. Estos resultados podrían derivarse de la ley de Biot-Savart, pero nosotros no haremos tales deducciones. Nos limitaremos a dar enunciados precisos y centraremos la atención en sus consecuencias más importantes.

10 Ley de Gauss magnetica.

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ invariante con el tiempo. Sea S una superficie cerrada imaginaria cualquiera que se encuentra en la región. Sea $\vec{dl}$ el nombre genérico de los vectores diferenciales normales exteriores de la superficie S. Entonces, el flujo del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a través de la superficie cerrada S, es siempre nulo.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \;=\; 0 \tag{46}$$

A partir de este enunciado podemos sacar algunas conclusiones inmediatas. En primer lugar, recordemos brevemente el caso electrostático. En ese caso, el flujo era proporcional a la carga eléctrica neta encerrada por la curva, y decíamos que las cargas eran las "fuentes escalares" del campo. Además era precisamente en las cargas donde empezaban y terminaban las líneas de campo.

La ley de Gauss magnética, por analogía nos dice que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ "no posee fuentes escalares". En otras palabras, no existe un análogo magnético de la carga eléctrica. A la vez, de esta propiedad se desprende que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ no tienen ni inicio ni fin. Esto sugiere que las mismas son necesariamente cerradas.

11 Ley de Ampere.

Consideremos una región del espacio en que yace una distribución de corriente estacionaria $\vec{J}(\vec{r})$, y el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ que ella produce. Sea C una curva simple cerrada cualquiera, y sea S una cualquiera de las superficies limitadas por la curva C. Sea $\vec{dl}$ un elemento de longitud de la curva C, cuya orientación ha sido elegida arbitrariamente. Sea $\vec{ds}$ un elemento de área de la superficie S, cuya orientación cumple con la regla de la mano derecha respecto de $\vec{dl}$. Entonces, La circulación del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a lo largo de la curva cerrada C, es proporcional al flujo de la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ a través de la superficie S.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \; = \; 4\pi k' \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \tag{47}$$

Expresión de bosillo: La ley de Ampere suele recordarse observando que la integral del segundo miembro es la corriente que atraviesa la superficie S. Llamando I_S a tal corriente podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \; = \; 4\pi k' I_S \tag{48}$$

La principal observación que surge de la ley de Ampere es que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ es "no conservativo". Por lo tanto no será posible derivarlo de un potencial escalar, tal como hacíamos con el campo electrostático. Por otra parte, esta ley puede utilizarse para el cálculo del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en casos muy particulares, en los que la distribución de corrientes presentan muy alta simetría.

12 Otra vuelta de tuerca sobre simetrías.

Y otra vez la cuestión de las simetrías... Pero ahora en relación con la ley de Ampere. ¿Qué nuevo condimento tienen los fenómenos magnéticos? Aparece una diferencia findamental, residente en que las fuentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son fuentes vectoriales (corrientes estacionarias). Esta diferencia con el caso electrostático (en que las fuentes eran escalares) genera una nueva variante de simetría, que en algunas áreas de la física suelen llamarse simetrías magnéticas[2].

Como siempre, estamos interesados en extraer conclusiones acerca de las componentes de $\vec{B}(\vec{r})$, por observación de la simetría de la distribución de corrientes. Para ello, comencemos por reconocer dos propiedades simples que surgen de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) \; = \; k' \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|^2} \; \times \; \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left| \, \vec{r} - \vec{r'} \, \right|} \, dv \tag{49}$$

[2] Por ejemplo en cristalografía.

Supongamos que D representa el dominio sobre el que se desarrolla la distribución de corriente. Así tendremos

a) Si la dirección de $\vec{J}(\vec{r'})$ es la misma sobre todo el dominio D, entonces la componente del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en dicha dirección es nula.

b) Si la distribución de corrientes se invierte (es decir que se campbia $\vec{J}(\vec{r'})$ por $-\vec{J}(\vec{r'})$), entonces el campo $\vec{B}(\vec{r})$ también se invierte. Esto es, $\vec{B}(\vec{r})$ se convierte en $-\vec{B}(\vec{r})$.

Veamos cómo operan estos conceptos en algunos ejemplos de alta simetría.

I) **Hoja de corriente plana infinitamente extendida:** Consideremos un plano infinitamente extendido sobre el cual se desarrolla una corriente uniforme, que cabe ser descripta por una "densidad superficial" constante $\vec{\kappa}$. Note que $\vec{\kappa}$ hace las veces de $\vec{J}$ en problemas donde la distribución se desarrolla sobre dominios superficiales (su unidad será A/m). Para analizar las componentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$, elegimos un punto P cualquiera, no contenido en el plano. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el eje z pasando por P en dirección perpendicular al plano de corrientes. El origen lo elegimos en el pie de dicha perpendicular sobre el plano. El eje x lo elegimos coincidente con la dirección de $\vec{\kappa}$, y eje y (por supuesto sobre el plano) de modo que forme una terna directa.

Apliquemos ahora las condiciones a y b. Como los vectores $\vec{\kappa}$ apuntan todos en dirección x la condición a puede aplicarse, por lo que la componente B_x es nula. Ahora imaginemos una rotación en π alrededor del eje z. Recordando que el campo está "atado" a sus fuentes, $\vec{B}(\vec{r})$ gira con el sistema. Al completar el giro, la distribución de fuentes se invirtió respecto de su posición original. Esto es, equivalente a decir que se cambió $\vec{\kappa}$ por $-\vec{\kappa}$. Sin embargo, la componente B_z se mantuvo inalterada. Por tanto B_z entra en contradicción con la propiedad b derivada de la ley de Biot-Savart. Entonces, B_z debe ser nula. Así concluimos que la única componente no nula de $\vec{B}$ es B_y. Indagamos ahora acerca de su variabilidad en el espacio. Si la distribución se traslada distancias arbitrarias en x y en y, su aspecto es invariante para un observador situado en P. Por tanto, el campo no puede depender de las cordenadas x e y. Entonces concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$, toma la forma simple

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; B_y\,(z)\;\breve{j} \tag{50}$$

II) **Cilindro infinito con corriente exial:** Consideremos ahora un objeto conductor infinitamente largo, por el circula una corriente axial cuya densidad volumétrica $\vec{J}$ depende exclusivamente de la coordenada radial ρ. Esto es, en coordenadas cilíndricas

$$\vec{J}(\vec{r}) \;=\; J_z\,(\rho)\;\breve{k} \tag{51}$$

donde el eje z corre a lo largo del eje del sistema. Nuevamente elegimos un punto P no contenido en el eje de la distribución. Como $\vec{J}$ tiene dirección z en todo el dominio, la componente B_z en P debe ser nula. Ahora imaginemos un eje que pasa por P y corta perpendicularmente al eje z. Si giramos la distribución en π alrededor del eje que pasa por P, su nuevo aspecto tiene los vectores $\vec{J}$ invertidos. Sin embargo, la componente B_ρ mantiene la orientación ente dicha rotación. Esto está en contradicción con la prpiedad b, por lo que b_ρ debe ser nula. Para finalizar el análisis, reconozcamos que un observador situado en P no detecta cambios por rotaciones alrededor del eje de simetría, ni por traslaciones a lo largo del mismo. Entonces $\vec{B}$ no puede depender ni de ϕ ni de z. Así concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ en este tipo de sistemas tendrá la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; B_\phi\,(\rho)\;\breve{\phi} \tag{52}$$

13 Ejemplo 1:Hilo recto infinito.

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo, por el que circula una corriente estacionaria I. Naturalmente, trabajamos en coordenadas cilíndricas. El análisis de la simetría nos permite concluir que la única componente no nula de $\vec{B}(\vec{r})$ es la azimutal y sólo depende de la coordenada radial ρ. Entonces

$$B_\rho \;=\; B_z \;=\; 0 \qquad\quad B_\phi \;=\; B_\phi\,(\rho) \tag{53}$$

De lo que inmediatamente se deduce que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo, cuyos centros están precisamente en el hilo. Esta simetría es especialmente apta para determinar el campo de inducción magnética utilizando la ley de Ampere.

Comencemos por elegir como curva de integración C, una línea de campo de radio ρ. La superficie S limitada por C puede ser el círculo de radio ρ contenido en el plano de la circunferencia. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en el sentido positivo del eje z[3]. Elegimos los vectores $\vec{dl}$ en sentido antihorario visto desde el lado positivo del eje z. En consecuencia, los vectores $\vec{ds}$ deben orientarse en el sentido positivo de z (regla de la mano derecha).

Trabajemos con el primer miembro de la ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} \;=\; \oint_C B_\phi\,(\rho)\,\breve{\phi}\cdot\; dl\,\breve{\phi} \;=\; \oint_C B_\phi\,(\rho)\;dl \tag{54}$$

[3]Es interesante observar que la corriente es una magnitud escalar, por lo que le corresponde un signo. En tal sentido, la elección hecha aquí puede considerarse como una convención de signos. Esto significa que los resultados que se obtengan podrán ser utilizados aún cuando la corriente vaya en sentido contrario, siempre que al reemplazar su valor se respete su signo.

Como el dominio de integración tiene ρ constante, la componente $\vec{B}_\phi(\rho)$ puede salir de la integral. Entonces

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; B_\phi\,(\rho) \int_C dl \;=\; 2\pi\rho\; B_\phi\,(\rho) \tag{55}$$

Ahora pongamos atención en el segundo miembro de la ley de Ampere. Observemos que el dato del problema es la corriente I, con lo que podríamos utilizar simplemente la formade bosillo. Sin embargo, corresponde una reflexión acerca del signo. En realidad, la corriente es el flujo del vector $\vec{J}$ a través del área del conductor. Por su parte, el área del conductor en el plano de la espira forma parte de la superficie S. Por tanto, I debe considerarse positiva si atraviesa la superficie en el sentido de $\vec{ds}$ y negativa en caso contrario. Esto está en concordancia con nuestra elección de I por lo que no aparecen incompatibilidades de signo. Entonces tenemos

$$2\pi\rho\; B_\phi\,(\rho) \;=\; 4\pi k' I \tag{56}$$

De donde tenemos finalmente que

$$B_\phi\,(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho} \tag{57}$$

o recuperando la forma vectorial

$$\vec{B}\,(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho}\;\breve{\phi} \tag{58}$$