

Capítulo 9

Campos variables en el tiempo.

1 Ley de Faraday.

Consideremos una región del espacio donde yacen simultáneamente un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y un campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ que pueden variar con el tiempo. Elegimos una curva simple cerrada C cualquiera y una de las superficies limitadas por C , a la que llamaremos S . Luego elegimos una orientación para circular sobre C , definiendo los vectores \vec{dl} tangentes a C , en el sentido elegido. Consistentemente, definimos los vectores \vec{ds} perpendiculares a S , cuyo sentido debe respetar la regla de la mano derecha en relación con \vec{dl} . Entonces, la circulación del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ sobre la curva cerrada C , es proporcional al valor cambiado de signo, que adquiera la derivada temporal del flujo magnético a través de la superficie S . Esto es

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_C \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

Una lectura inmediata de la ley de Faraday nos indica la aparición de una nueva variedad de campos eléctricos. ¿Por qué una nueva variedad? Observe el lector que la integral de circulación del primer miembro era ya conocida en el contexto de la electrostática. Justamente, en dicho contexto resultaba siempre nula, por lo que decíamos que el campo electrostático es conservativo. Ahora resulta que esto ya no es así. Cuando se admiten modificaciones temporales, el campo eléctrico puede ser “no conservativo”, en cuyo caso sus fuentes están relacionadas con la variación temporal del flujo magnético. En otras palabras, decimos que variaciones temporales del flujo magnético, dan lugar a la creación de un campo eléctrico no conservativo.

En el segundo miembro de la ley de Faraday, observamos que la derivada temporal abarca la integral de flujo magnético. Entonces, cualquier modificación de dicho flujo dará lugar a que la derivada tome valores no nulos. Pero ¿qué hechos pueden dar lugar a variaciones de flujo? Aquí van algunas causas posibles

- a) Que el campo magnético \vec{B} varíe con el tiempo.
- b) Que la curva C cambie de posición u orientación con el tiempo.
- c) Que la curva C cambie de forma con el tiempo.

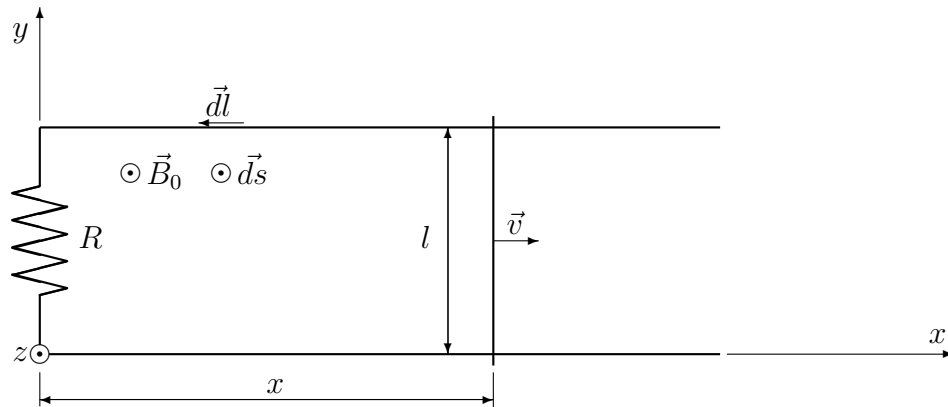
Por supuesto que cuando ocurre alguno de estos hechos, no hay garantía de que el flujo efectivamente varíe. Habrá que analizar cada caso en particular.

2 Proyección tecnológica.

La ley de Faraday constituye uno de los logros más trascendentales de la historia de la ciencia. Calificativo que merecería ya por ser una pieza clave en la formulación de la teoría electromagnética. Pero hubo mucho más... Según cuentan los que conocen la historia, parece que un distinguido científico (casi seguramente miembro de la Royal Society) le preguntó a Faraday: ... más allá del simpático efecto al que usted refiere, digamé ¿para qué puede “servir” que en un lazo conductor se establezca una corriente, frente a la variación del flujo magnético? Naturalmente, Faraday desconocía la respuesta, por lo que contestó con una nueva pregunta... Y usted podría decirme a priori ¿para qué sirve un bebé que hoy mismo estará naciendo? Si quiere saberlo, debe esperar pacientemente acompañando su desarrollo con esmerados cuidados... La historia mostró que aquel efecto sería uno de los principales promotores del desarrollo tecnológico desde el último cuarto del siglo XIX hasta nuestros días.

Pero ¿Cómo fue esa historia? En realidad, la ley de Faraday no nació con el formato que la presentamos hoy, sino que había una diferencia menor (¿menor?): La curva cerrada C no era una curva imaginaria cualquiera del espacio, sino un hilo conductor cerrado. Esta posibilidad sigue siendo válida en la formulación actual, aunque se admiten otras variantes. Pero centrémonos en esa primera mirada, desarrollando el ejemplo más elemental posible.

Consideremos una horquilla formada por dos varillas conductoras paralelas, unidas por un puente resistivo en uno de los extremos (ver figura). Otra varilla conductora



se desliza sobre los lados paralelos, de modo que con su contacto cierra un circuito rectangular de área variable. Para fijar ideas, suponga que la varilla móvil viaja hacia la derecha con velocidad constante \vec{v} , mientras que el montaje completo se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme \vec{B}_0 , perpendicular al plano de la horquilla y saliente del dibujo. El origen de coordenadas, y la terna directa de

ejes se indican en la figura, con lo que los vectores velocidad y campo magnético toman la forma

$$\vec{v} = v \check{i} \quad \vec{B}_0 = B_0 \check{k} \quad (2)$$

¿Cuál será la expectativa respecto del funcionamiento de este sistema? Vayamos por partes,

a) En primer lugar, observemos que la variación temporal del flujo magnético a través del área del circuito, dará lugar a que la circulación del campo eléctrico sobre él resulte no nula. Siempre que ocurre esto sobre un circuito, decimos que el circuito está afectado por una fuerza electromotriz ϵ dada por

$$\epsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Recordando la relación entre esta integral y el trabajo mecánico, podemos definir la fuerza electromotriz inducida ϵ como el trabajo por unidad de carga móvil del circuito, aportado por el fenómeno electromagnético.

b) Como consecuencia de la fuerza electromotriz aparecerá una corriente en el circuito, dando lugar a la disipación térmica por efecto Joule en el resistor.

c) Dado que por la varilla móvil circula una corriente, y que la misma se desplaza dentro de un campo magnético, aparecerá sobre ella una fuerza magnética.

d) Para que la velocidad sea constante, será necesario que un agente externo aporte una fuerza que compense la fuerza magnética.

Antes de comenzar con la resolución, definamos la geometría. Llamaremos C a la curva que describe el circuito, la cual tendrá un formato variable. Sobre ella elegimos que los vectores $d\vec{l}$ estén orientados en sentido antihorario. Luego elegimos que la superficie S sea el sector del plano limitado por C , y sus vectores normales $d\vec{s}$, en virtud de la regla de la mano derecha, resultan salientes del plano del dibujo.

$$d\vec{s} = ds \check{k} \quad (4)$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar la ley de Faraday (1). Comencemos por calcular el flujo magnético.

$$\Phi_{\vec{B}S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B_0 \check{k} \cdot ds \check{k} = \int_S B_0 ds = B_0 \int_S ds = B_0 A \quad (5)$$

donde $\Phi_{\vec{B}S}$ se ha utilizado como notación habitual para flujos. Observe que A es el área variable de la superficie S que puede escribirse como

$$A = lx \quad (6)$$

donde l es la separación entre los lados paralelos de la horquilla. Ahora escribimos

la ley de Faraday en una forma “casi” de bolsillo¹.

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{\vec{B}S}}{dt} \quad (7)$$

Reemplazando (4) y (5) en (6) y operando, tenemos

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}(B_0lx) = -B_0l\frac{dx}{dt} = -B_0lv_x = B_0lv \quad (8)$$

Si R es la resistencia del circuito, la ley de Ohm nos conduce a la corriente I que circula por el mismo

$$\epsilon = IR \quad \rightarrow \quad I = -\frac{B_0lv}{R} \quad (9)$$

y la potencia convertida por efecto Joule en el resistor es

$$P = I^2R = \frac{B_0^2l^2v^2}{R} \quad (10)$$

Analicemos la fuerza magnética que actúa sobre la varilla móvil. Para ello imaginamos la varilla segmentada en tramos diferenciales, cada uno de los cuales está caracterizado por un vector \vec{dl} . Por otra parte, el campo magnético \vec{B}_0 ejerce su influencia sobre cada uno de estos elementos. Las formas vectoriales consistentes con la geometría planteada son

$$\vec{dl} = dy\check{j} \quad I\vec{dl} = -\frac{B_0lv}{R}dy\check{j} \quad \vec{B}_0 = B_0\check{k} \quad (11)$$

Entonces, la contribución $d\vec{F}_M$ a la fuerza magnética sobre cada elemento \vec{dl} de la varilla viene dada por

$$d\vec{F}_M = I\vec{dl} \times \vec{B}_0 = -\frac{B_0lv}{R}dy\check{j} \times B_0\check{k} = -\frac{B_0^2lv}{R}dy\check{i} \quad (12)$$

La fuerza total se obtiene por integración sobre toda la varilla. Observando las constantes del caso, tenemos

$$\vec{F}_M = -\frac{B_0^2lv}{R} \int_0^l dy = -\frac{B_0^2l^2v}{R}\check{i} \quad (13)$$

Entonces concluimos que la fuerza magnética \vec{F}_M es opuesta a la velocidad. Ahora bien, según hemos propuesto en las hipótesis, la varilla viaja a velocidad constante

¹Decimos casi, porque este formato no es terminológicamente adecuado para todos los casos. La fuerza electromotriz es un concepto de neto corte tecnológico, por lo que no se condice con usos de la ley de Faraday en aplicaciones en el vacío libre de cargas.

\vec{v} , por lo que la fuerza neta sobre ella debe ser nula. De esto se deriva que hay otra fuerza sobre la varilla, que compensa el efecto magnético. Esta fuerza debe ser aportada por un agente externo, por lo que la llamaremos “fuerza externa” y la denotaremos por \vec{F}_{EXT} . Entonces

$$\vec{F}_M + \vec{F}_{EXT} = 0 \quad (14)$$

Aquí cabe preguntarse, ¿Qué potencia mecánica estará aportando el agente externo para sostener el movimiento de la varilla? Consideremos el desplazamiento de la varilla entre dos posiciones rotuladas como x_1 y x_2 , por las que la misma pasa en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. La potencia media P_{EXT} desarrollada por el agente externo en este recorrido será

$$P_{EXT} = \frac{W_{\vec{F}_{EXT}}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_1^2 \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{l}' \quad (15)$$

donde $d\vec{l}'$ es un elemento del camino. Los vectores involucrados son

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \hat{i} \quad y \quad d\vec{l}' = dx \hat{i} \quad (16)$$

Entonces

$$P_{EXT} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \hat{i} \cdot dx \hat{i} = \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (17)$$

Como la velocidad es constante, el segundo cociente coincide con el módulo de dicha velocidad. Finalmente tenemos que

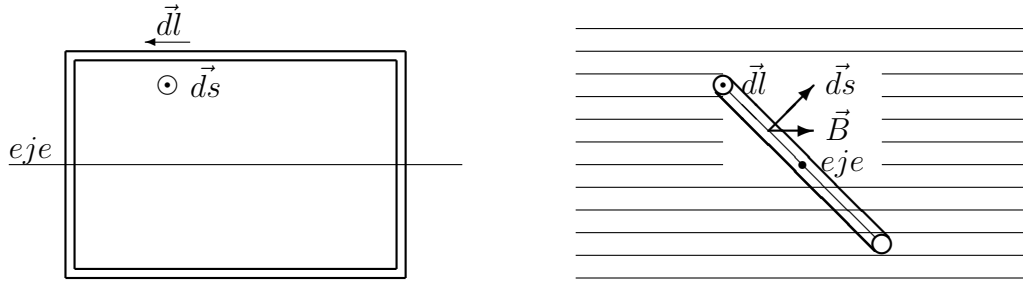
$$P_{EXT} = \frac{B_0^2 l^2 v^2}{R} \quad (18)$$

Este resultado coincide exactamente con la potencia convertida por efecto Joule, que fuera obtenida en (9). Discutamos la trascendencia de este resultado. En primer lugar observemos que el mecanismo en conjunto permite la conversión de trabajo mecánico en energía térmica disponible para ser transferida en forma de calor en diversos usos. ¿De qué manera se ha utilizado esto como clave del progreso tecnológico? Para comprender esto, nos remitiremos a una historia que, aunque ficticia, podría representar la realidad muchas veces repetida. Cuando los antiguos pobladores de una pequeña comunidad se organizaron en forma colectiva, tenían la necesidad de recolectar leña en los alrededores de la aldea. Esta tarea de acarreo y almacenamiento era trabajosa pero simple. Sin embargo, las ventajas de vivir en comunidades concentradas en pueblos, llevó a una creciente demanda energética que complicaba las cosas. La naturaleza no proveía suficiente leña en bosques cercanos, por lo que los acarros eran largos y dificultosos. Apareció la competencia con los poblados vecinos por el control de los recursos energéticos, y todo lo que ya sabemos ... El sistema colapsó. Pasaron algunos siglos de acuerdos y desacuerdos (que por

supuesto, siguen hasta hoy), hasta que apareció una alternativa al problema de transporte de energía (Entiéndase bien, sólo se resuelve en parte el problema de transporte). ¿Cómo funciona? Se convierte energía mecánica en electricidad, donde hay recursos naturales. Luego se “transporta” la electricidad por los cables hasta los centros de consumo. Allí se la reparte (se la factura) y se la reconvierte para diversos usos.

3 Ejemplo 1. Espiras rotantes.

Consideremos una espira plana que es obligada a girar con velocidad angular constante ω , alrededor de un eje contenido en el mismo plano de la espira. Suponga que el montaje se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética \vec{B} uniforme e invariante en el tiempo, cuya orientación es perpendicular al eje de giro. El movimiento de la espira es garantizado por el trabajo que aporta un agente externo. Para fijar ideas, consideremos que la espira es un alambre conductor de forma rectangular, que gira alrededor de un eje que pasa por su centro como indica la figura. Para aplicar la ley de Faraday, elegimos la curva cerrada C sobre la espira, y la su-



perficie S como el sector plano rectangular limitado por C . Elegimos la circulación antihoraria como positiva, y consistentemente la superficie queda orientada con sus vectores normales salientes del plano del dibujo. Aquí hay que tener mucho cuidado, porque la espira cambiará de posición con el tiempo por lo que la orientación elegida puede prestarse a confusiones. Entonces debemos enfatizar que la orientación elegida debe respetarse en todo tiempo sobre la espira, por lo que una buena práctica sería “pintar” el alambre con la flecha que indica el sentido elegido para los vectores \vec{dl} .

Ahora imaginemos que la espira está moviéndose dentro del campo de inducción magnética \vec{B} . Entonces aparecerá sobre ella una fuerza electromotriz inducida ϵ dada por

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (19)$$

Los vectores involucrados en el flujo son \vec{B} y \vec{ds} . Sus módulos son constantes, pero sus orientaciones relativas varían con el tiempo. En la figura vemos la espira en un instante mientras gira. Los vectores son idénticos sobre toda la superficie, y el ángulo que forman en ese instante es

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (20)$$

Entonces

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \int_S B \cos(\theta_0 + \omega t) ds = -\frac{d}{dt} \left[B \cos(\theta_0 + \omega t) \int_S ds \right] \quad (21)$$

La integral representa el área de la espira, a la que identificaremos por A . Resolviendo la derivación, tenemos

$$\epsilon = BA\omega \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (22)$$

Este resultado representa una fuerza electromotriz oscilante de amplitud ϵ_0 , con lo que tenemos

$$\epsilon_0 = BA\omega \quad \rightarrow \quad \epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (23)$$

Cuando la fuerza electromotriz tiene esta forma de variación temporal, la llamamos f.e.m. alterna.

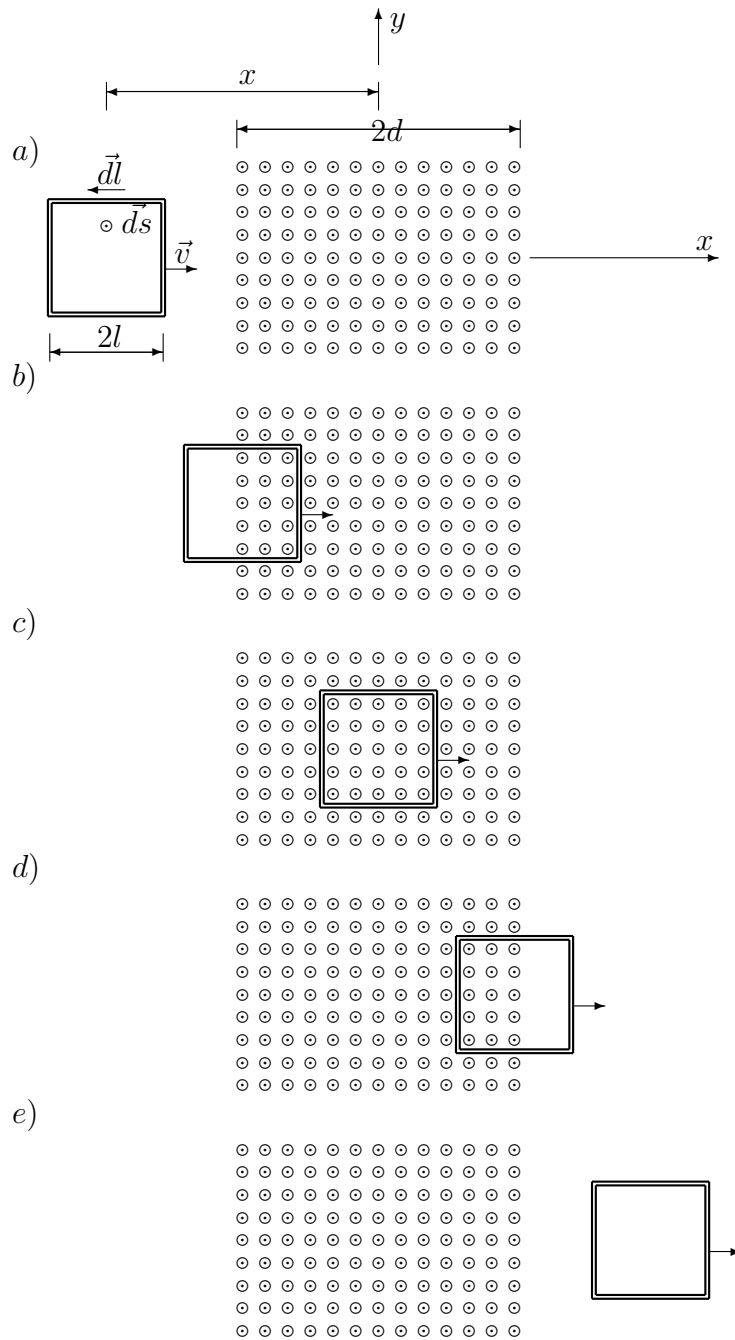
El fenómeno que describimos en este ejemplo constituye la base de funcionamiento de la más difundida clase de generadores eléctricos. Habitualmente, los generadores que suministran una f.e.m. alterna se llaman “alternadores”. Otras máquinas que funcionan bajo la misma idea básica se llaman “dínamos”, pero un mecanismo de conmutación hace que la f.e.m. que producen sea del tipo continua.

La expresión (24) muestra que la amplitud de la f.e.m alterna depende del área de la espira, por lo que los diseños compactos de generadores no utilizan una única espira, sino un arrollamiento formado por N espiras muy apretadas. En estos casos, la amplitud se convierte en

$$\epsilon_0 = NBA\omega \quad (24)$$

4 Ejemplo 2. Espira móvil.

Supongamos que cierta región del espacio de ancho $2d$ está afectada por un campo de inducción magnética uniforme \vec{B} . Supongamos además que una espira cuadrada de lado $2l$ y resistencia R , se desplaza perpendicularmente al campo con velocidad constante \vec{v} , como indica la secuencia de la figura. Nos preguntamos acerca de la corriente que circulará por la espira en cada tramo de su recorrido.

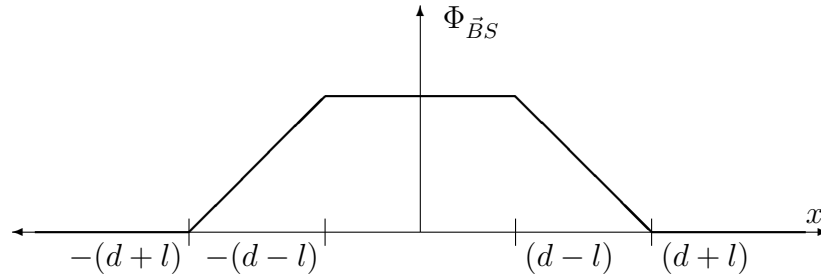


Para desarrollar el problema, necesitamos un marco geométrico adecuado. Elegimos el origen de coordenadas y los ejes como se indica en el primer dibujo de la secuencia. Luego reservaremos la notación x para identificar la abscisa del centro de la espira (Note que inicialmente es negativa). Ahora elegimos el sentido de circulación antihorario como positivo sobre la espira, por lo que la superficie plana limitada por la misma queda orientada con sus vectores normales salientes. Aquí proponemos que el estudiante determine el flujo por observación directa sobre el gráfico, hasta

convencerse de lo que sigue

$$\Phi_{\vec{B}S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -(d+l) \\ 2Bl(x+d+l) & \text{si } -(d+l) < x < -(d-l) \\ 4Bl^2 & \text{si } -(d-l) < x < (d-l) \\ 2Bl(x-d-l) & \text{si } (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si } (d+l) < x \end{cases} \quad (25)$$

En la figura representamos el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}S}$ como función de la coordenada x . Apliquemos la ley de Faraday, pero cuidando mucho el detalle de la derivación.



Observe que utilizamos la regla de la cadena

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_{\vec{B}S} = -\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x)\frac{dx}{dt} = -v_x\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x) \quad (26)$$

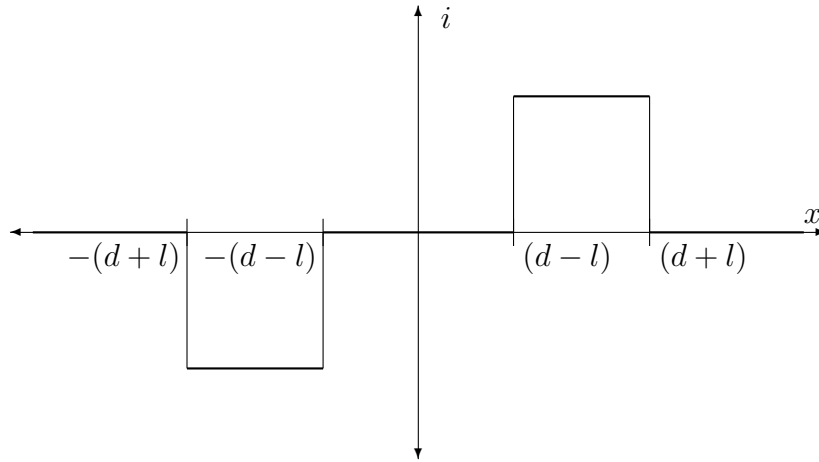
Y la corriente se obtiene simplemente dividiendo por R .

$$i(x) = -\frac{v_x}{R}\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x) \quad (27)$$

Reemplazando y operando obtenemos

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -(d+l) \\ -\frac{2Blv_x}{R} & \text{si } -(d+l) < x < -(d-l) \\ 0 & \text{si } -(d-l) < x < (d-l) \\ \frac{2Blv_x}{R} & \text{si } (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si } (d+l) < x \end{cases} \quad (28)$$

En la figura siguiente representamos la corriente i como función de la coordenada x . Observe la relación entre este gráfico y el anterior. Los únicos tramos del recorrido en los que aparecen corrientes son los indicados por b y d en la secuencia. Estos tramos coinciden con la entrada de la espira en la región de campo, y su posterior salida. La corriente durante la entrada es negativa, por lo que interpretamos que



circula en sentido horario. Contrariamente en la salida la corriente circula en sentido antihorario. Como ya hemos visto, la energía disipada por efecto Joule en la espira debe ser aportada por un agente externo, que realice trabajo para sostener el movimiento. Es interesante observar que durante la entrada de la espira (tramo b), la fuerza magnética total sobre ella es la que opera sobre el lado derecho, donde la corriente circula hacia abajo. Utilizando la regla de la mano derecha, observamos que la fuerza magnética apunta hacia la izquierda. Observe que en la salida (tramo d) la fuerza magnética apunta nuevamente hacia la izquierda, ya que la corriente es antihoraria, pero se involucra el lado izquierdo de la espira. Este simple razonamiento nos permite concluir que el agente externo debe hacer fuerza hacia la derecha en ambos tramos para mantener el movimiento.

5 Regla de Lenz.

Demos otra vuelta de tuerca sobre el ejemplo anterior. Comencemos por centrar nuestra atención en el tramo b donde la corriente circula en sentido horario. Si pensamos que tal corriente es la fuente de un campo de inducción magnética adicional, es fácil observar que el flujo de dicho campo a través de la espira será negativo (flujo entrante)². Si ahora observamos lo que ocurre en el tramo d , encontramos que el flujo debido a la corriente es positivo (saliente). ¿Qué detalle comparten estos comportamientos? A riesgo de incurrir en una personificación de dudosa rigurosidad, me permito atribuirle cierta “voluntad” a la espira. Podemos imaginar que su carácter es conservador, de modo que su respuesta ocurre en oposición a los cambios. Pero ¿Qué tipo de cambios? Justamente, cambios en el flujo a través de

²Si para el lector no fuera evidente, sugerimos el uso de la regla de la mano derecha.

ella. Si observamos cuidadosamente, vemos que, tanto en el tramo b como en el d , la espira “produjo” corrientes que generaron flujos en “oposición” al cambio del flujo preexistente. En efecto, en el tramo b el flujo preexistente era saliente y su valor aumentaba. Entonces el flujo aportado por la corriente fue entrante, como un intento de evitar el cambio que estaba ocurriendo. En el tramo d , el flujo preexistente era saliente pero disminuía. Entonces, para evitar tal disminución, la corriente en la espira circuló de modo tal que el flujo producido tendiera a “reforzar”, apuntalando el estado previo.

Este modo de pensar, tal vez algo informal, es muy práctico y difundido, especialmente en ámbitos tecnológicos. El mismo recibe el nombre de regla de Lenz, y constituye una excelente herramienta intuitiva para la determinación del sentido de circulación de la corriente. No obstante, es conveniente remarcar que la ley de Faraday tiene un espectro muy abarcativo de fenómenos, en los que no siempre hay corrientes involucradas. Por tanto la regla de Lenz no es una ley general, al menos en el sentido informal que la definimos. Sin embargo, un intento de formalización no nos conduciría más que a la ley de Faraday tal y como ya la enunciamos. Algunos autores, atendiendo a un merecido homenaje, suelen referirse a la ley de Faraday-Lenz.

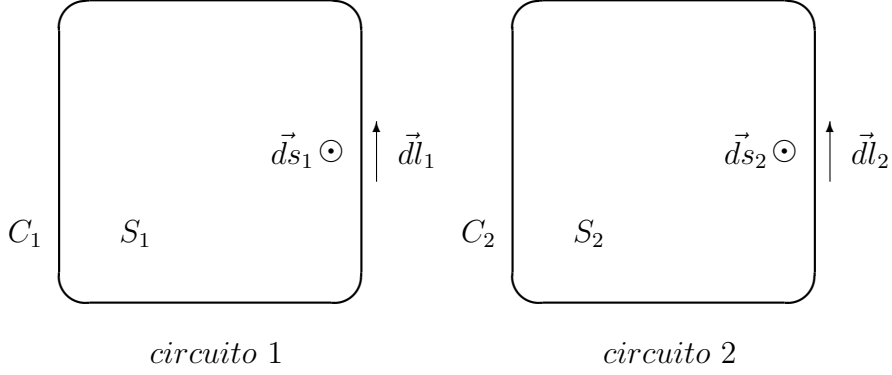
6 Inducción mutua.

Consideremos dos circuitos fijos a los que identificaremos por 1 y 2, tales que sean muy próximos entre sí. Cuando decimos fijos, entendemos que no varían ni sus formas ni las posiciones relativas entre ellos. Supongamos ahora que a lo largo del circuito 1 circula una corriente instantánea $i_1(t)$, que genera un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$. Este influye sobre el circuito 2, originando un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$ a través de una superficie S_2 limitada por la curva C_2 sobre la que se desarrolla dicho circuito. Supongamos además que las variaciones temporales de i_1 son relativamente pequeñas, de modo que el campo \vec{B}_1 pueda aproximarse con la ley de Biot-Savart. Entonces en el instante t tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2, t) \cdot d\vec{s}_2 \quad (29)$$

donde \vec{r}_2 representa los puntos de la superficie S_2 , y $\vec{B}_1(\vec{r}_2, t)$ viene dado por la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{i_1(t) d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 i_1(t)}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (30)$$



En esta expresión, las posiciones \vec{r}_1 representan los puntos de la curva C_1 , sobre la que se desarrolla el circuito 1. Reemplazando (30) en (29) y operando obtenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot \vec{ds}_2 \right] i_1(t) \quad (31)$$

donde $i_1(t)$ pudo extraerse de las integrales porque resulta independiente de la geometría sobre la que operan las integrales. En otras palabras, vista desde los dominios de integración, $i_1(t)$ es una constante. Ahora centremos la atención en la expresión entre corchetes (que por cierto, asusta). Observemos que la misma depende exclusivamente de la geometría de los circuitos, que por hipótesis es fija. Entonces estamos en condiciones de asegurar que la expresión entre corchetes es una constante a la que llamaremos “coeficiente de inducción mutua” del montaje, y denotaremos por M . Entonces

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot \vec{ds}_2 \quad (32)$$

Aunque la definición de M tiene un aspecto muy desagradable, resulta reparador saber que rara vez se utiliza en forma tan cruda. Luego lo comprobaremos con un ejemplo. Lo que es verdaderamente significativo es la versatilidad operativa que aporta a la ley de Faraday, cuando la misma se aplica a la interacción entre circuitos. Supongamos que han sido debidamente elegidas las orientaciones de curvas y superficies en el montaje de los circuitos 1 y 2. Entonces, combinando la ley de Faraday con (32) tenemos

$$\epsilon_{21} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = -M \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (33)$$

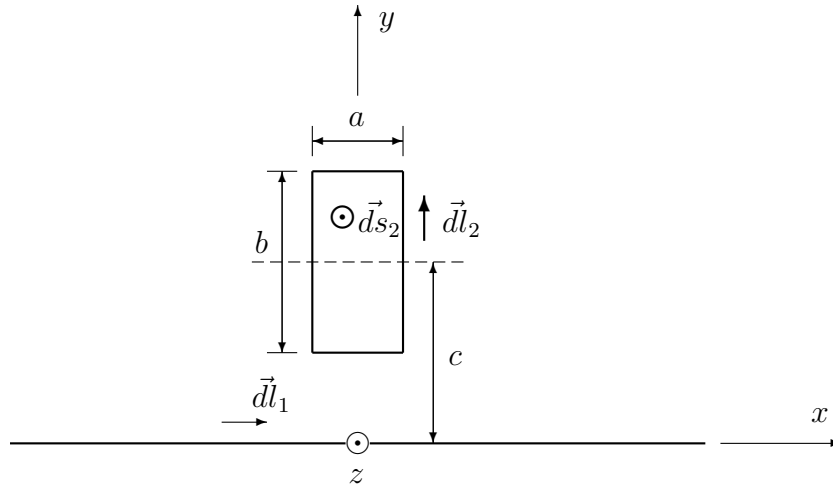
donde ϵ_{21} representa la f.e.m inducida sobre el circuito 2, debido a la variación temporal de la corriente que circula por 1.

Una propiedad sumamente útil puede demostrarse a partir de la reciprocidad del análisis anterior. Si hubiéramos considerado que la corriente circulaba por el circuito 2 y estudiabamos su influencia sobre el 1, habríamos obtenido el mismo coeficiente M . Esto es

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\Phi_{\vec{B}_2 S_1}(t)}{i_2(t)} \quad (34)$$

7 Ejemplo de cálculo.

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo. Una espira rectangular conductora, cuyos lados tienen longitudes a y b , se encuentra en el mismo plano que el hilo, de modo que sus lados menores sean paralelos al hilo. Supongamos además que la distancia del hilo al centro de la espira es c como se muestra en la figura ($c > a/2$). Nos proponemos determinar el coeficiente de inducción mutua



del montaje, y la fuerza electromotriz inducida en la espira, cuando una corriente alterna de amplitud I_1 y frecuencia angular ω circula por el hilo infinito.

Para comenzar, elegimos el origen y los ejes de coordenadas como se indica en la figura. Identificamos como circuito 1 al hilo y como circuito 2 a la espira. Luego elegimos los sentidos de circulación sobre cada circuito, para tener claro el significado de los signos de fuerzas electromotrices y corrientes sobre los mismos. Como tenemos que utilizar el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito 2, elegimos la superficie plana del rectángulo limitado por el circuito, y la orientamos consistentemente (ver figura). Entonces la geometría ya está preparada.

Ahora tenemos que determinar el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$. Los vectores involucrados son

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi y} \check{k} \quad \vec{ds}_2 = dx dy \check{k} \quad (35)$$

Entonces el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{ds}_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{c-b/2}^{c+b/2} \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi y} \check{k} \cdot dx dy \check{k} \quad (36)$$

El producto de los versores es la unidad. Luego tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{c-b/2}^{c+b/2} \frac{dy}{y} \quad (37)$$

Las integrales son inmediatas, con lo que concluimos que el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0 a i_1(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \quad (38)$$

Ahora, el coeficiente de inducción mutua se obtiene muy fácilmente

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}}{i_1(t)} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \quad (39)$$

El estudiante podría pensar que hemos tenido mucha suerte en que la corriente se pudiera simplificar con tanta facilidad. Sin embargo, esto debe ocurrir cualquiera sea la complejidad del montaje. Esto se debe a que siempre existirá (según hemos demostrado) una relación lineal entre flujo y corriente.

Para determinar la fuerza electromotriz inducida utilizamos la forma compacta derivada de la ley de Faraday.

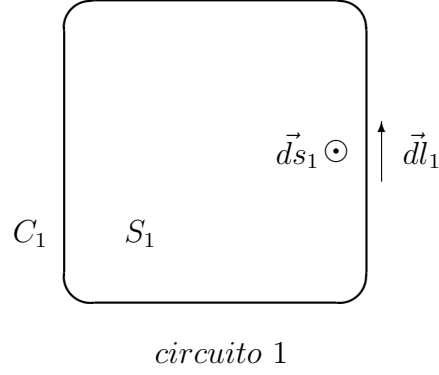
$$\epsilon = -M \frac{d}{dt} i_1(t) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \frac{d}{dt} [I_1 \sin(\omega t + \phi)] \quad (40)$$

Entonces

$$\epsilon = -\frac{\mu_0 a I_1 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \cos(\omega t + \phi) \quad (41)$$

8 Autoinducción.

Siguiendo lineamientos análogos a los que conducen al concepto de inducción mutua, podemos establecer una relación entre el flujo que atraviesa la superficie limitada



por el circuito 1, originado por la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Para ello consideremos un circuito fijo sobre la curva C_1 y una de las superficies limitadas por dicha curva, a la que llamaremos S_1 . La corriente $i_1(t)$ dará lugar a un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$, y éste a un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t)$ a través de S_1 . Entonces, definimos el coeficiente de autoinducción L del circuito, como

$$L = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t)}{i_1(t)} \quad (42)$$

Esta expresión es análoga a la (32), aunque ha sido voluntariamente omitida la definición constructiva ¿por qué? Simplemente porque el modelo que representa un circuito como contenido en una curva cerrada colapsa en el intento de calcular la autoinducción. En efecto, el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$ va a infinito en este modelo, en contra de la observación experimental que da cuenta de un coeficiente de autoinducción siempre finito. Aquí nuevamente planteamos un enérgico alerta acerca de la representatividad de los modelos, recordando que los mismos son caricaturas de la realidad, por lo que la interpretación queda a cargo de quien lo utiliza.

Pero entonces, ¿Qué modelo podemos usar? En principio, la restricción sólo pesa sobre representaciones lineales de conductores con corriente. Ya una representación superficial de la corriente puede utilizarse. Por supuesto, siempre podrá modelarse la corriente sobre un sustrato volumétrico.

Por último, tratamos la fuerza electromotriz autoinducida ϵ_{11} en el circuito, a partir de las variaciones temporales de la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Supongamos que las reglas geométricas han sido debidamente respetadas para poder aplicar la ley de Faraday. Entonces tenemos

$$\epsilon_{11} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t) = -L \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (43)$$

La tecnología ha requerido la creación de objetos compactos de gran autoinducción, a los que se los denomina “inductores”. El uso llevó a la necesidad de una unidad

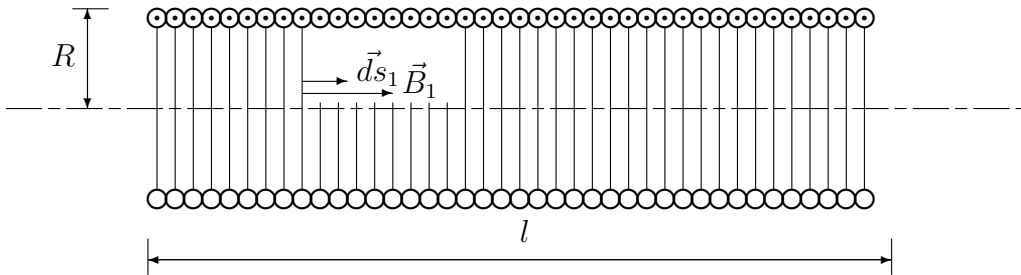
para los coeficientes M y L . La misma se llama “Henrio” y se representa por H . Su relación con las unidades previas es

$$H = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Vs}{A} = \Omega s = \frac{s^2}{F} \quad (44)$$

Para concluir este tratamiento, es importante resaltar el valor de la expresión (43), y su análoga (33). Ambas proporcionan una forma compacta de representar la influencia de elementos inductivos en circuitos. Como veremos más adelante, los inductores tienen un gran protagonismo en cuestiones tecnológicas muy diversas.

9 Ejemplo. Autoinducción de un solenoide.

Como ejemplo, desarrollemos el cálculo de la autoinducción de un solenoide de radio R y longitud l , formado por N espiras muy apretadas (ver figura). Según hemos



tratado anteriormente, el campo de inducción magnética producido por un solenoide cuya longitud es bastante mayor que su radio, puede aproximarse como uniforme dentro de su volumen y nulo afuera. En la región interior viene dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1(t) N}{l} \vec{i} \quad (45)$$

donde $i_1(t)$ representa la corriente que circula por el solenoide, y hemos asumido que el eje x positivo corre hacia la derecha a lo largo del eje de simetría.

Para determinar el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$, observemos que la superficie involucrada proviene de unir las N superficies circulares limitadas respectivamente por las N espiras. Llamaremos S_e a la superficie limitada por cada espira. Como el campo \vec{B}_1 es uniforme dentro del solenoide, tenemos que

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{ds}_1 = N \int_{S_e} \frac{\mu_0 i_1(t) N}{l} \vec{i} \cdot \vec{ds}_1 \vec{i} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2}{l} \int_{S_e} ds_1 \quad (46)$$

la integral remanente no es más que el área de la superficie limitada por una de las espiras. Entonces

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2 \pi R^2}{l} \quad (47)$$

Por último, determinamos el coeficiente de autoinducción L . Como era de esperarse, el flujo magnético resultó lineal con la corriente, por lo que L se obtiene muy sencillamente.

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l} \quad (48)$$

Observemos que el coeficiente de autoinducción depende exclusivamente de magnitudes geométricas, y de la constante μ_0 . Esta última refiere a que el campo de inducción magnética involucrado se desarrolla en el vacío.