Capítulo 11
Circuitos con fuentes de tensión alterna.

1 Introducción.

Los circuitos de corriente alterna constituyen un ejemplo cotidiano de aplicación del electromagnetismo, ya que las redes domiciliarias son circuitos de este tipo. Cuando tratamos la ley de Faraday, observamos que los montajes de bobinas giratorias en campos magnéticos uniformes generan fuerzas electromotrices oscilantes, a expensas de la energía aportada por un agente externo (motor). Tal dispositivo puede utilizarse como fuente de alimentación para un circuito, en cuyo caso diremos que el dispositivo es una "fuente de tensión alterna", y que el circuito está sometido a un "régimen de corriente alterna"[1]. En nuestro tratamiento, nos remitiremos exclusivamente a fuentes de tensión alterna que suministran tensiones de la forma

$$v_F(t) = V_F \ \sin(\omega t + \phi) \tag{1}$$

donde $v_F(t)$ representa la diferencia de potencial garantizada entre los terminales de la fuente en cada instante (note que es una función del tiempo). Como se trata de una magnitud que oscila armónicamente, cabe definir su amplitud V_F, su frecuencia angular ω y su fase inicial ϕ.

Los circuitos que trataremos en este curso serán sólo los más elementales, incluyendo resistores, inductores y capacitores, bajo la acción de una única fuente de tensión alterna. Como ya es sabido, la puesta en marcha de un circuito que contiene inductores y capacitores da lugar a un régimen transitorio. Nosotros no analizaremos tales efectos, por lo que asumiremos que la conexión de la fuente con el circuito se ha realizado largo tiempo atrás[2]. En estas condiciones, puede probarse que todas las tensiones y corrientes medibles del circuito oscilan armonicamente con la misma frecuencia que la fuente. Si llamamos $u(t)$ a una tensión medida entre dos puntos del circuito, o a una corriente medida en un punto del circuito, la misma será de la forma

$$u(t) = U \ \sin(\omega t + \delta) \tag{2}$$

donde ω siempre es la misma frecuencia angular de la fuente y δ es una fase relativa particular de cada magnitud medida.

[1] En realidad, la tecnología actual provee de fuentes de tensión alterna que funcionan por principios muy diversos, por lo que los dispositivos mencionados deben tomarse como un ejemplo para fijar ideas.

[2] En terminología más estricta, decimos que el régimen es "estacionario", aunque la palabra se presta a confusión por la variabilidad temporal de las magnitudes involucradas.

Con respecto a las notaciones, observemos como ejemplo la función (2). Reservaremos las letras minúsculas para identificar los valores instantáneos de una magnitud (variable dependiente del tiempo), y su homóloga mayúscula para la amplitud asociada.

2 La representación fasorial.

Como sabemos, los vectores en el plano pueden representarse como segmentos orientados. Un fasor es un vector "rotante", tal que el segmento que lo representa mantiene uno de sus extremos fijos, mientras que el otro (el que tiene flecha) gira sobre una circunferencia. Nosotros utilizaremos esta representación para el caso particuar en que el fasor gira con frecuencia angular constante ω en sentido antihorario (ver figura 1). Sea $\vec{U}(t)$, un fasor genérico, cuyas componentes en la notación habitual serán

$$u_x(t) = U \;\cos(\omega t + \delta) \tag{3}$$

$$u_y(t) = U \;\sin(\omega t + \delta) \tag{4}$$

donde U representa el módulo del fasor. Observe la completa analogía entre las funciones (2) y (4). En virtud de tal comparación, podemos interpretar que las funciones del tipo (2) "son" las proyecciones de fasores sobre el eje "y". En tratamientos posteriores nos referiremos a fasores reservando las notaciones vectoriales a tal fin.

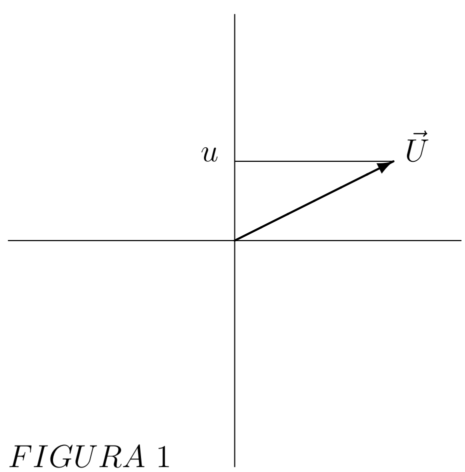
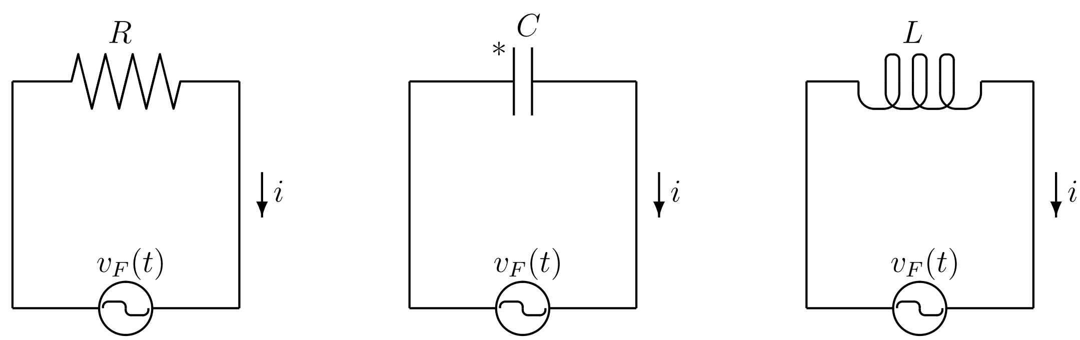


FIGURA 1

La principal ventaja de esta representación radica en que los fasores representativos de todas las magnitudes físicas giran a la misma velocidad, por lo que sus posiciones relativas se mantienen en el tiempo como si fuera un rotador rígido. Esto permite evaluar relaciones vectoriales a un tiempo, sabiendo que dichas relaciones se mantienen para todo tiempo posterior.

3 Los circuitos más elementales.

Los montajes más elementales que pueden concebirse en corriente alterna, surgen de la conexión de un único dispositivo (resistor, capacitor o inductor) con la fuente de tensión alterna. Estos circuitos se representan en las figuras 2.a, 2.b y 2.c.



$FIGURA$ 2.a $FIGURA$ 2.b $FIGURA$ 2.c

Observe que en las figuras se indican sentidos de circulación para la corriente, aún cuando sabemos que la misma será oscilante. En realidad, la flecha indica que cuando la corriente en nuestros cálculos resulte positiva, interpretaremos que circula a favor de la flecha y viceversa. Estos sentidos se eligen en forma arbitraria, pero las ecuaciones deben ser consistentes con la convención adoptada[3].

A continuación trabajaremos con cada uno de los circuitos, para establecer la corriente como función del tiempo en cada caso. Asimismo, aprovecharemos este análisis para definir magnitudes muy útiles en circuitos más complejos. En todos los casos supondremos que la fuente suministra una tensión alterna del tipo (1) con fase inicial nula.

$$v_F(t) = V_F \ \sin(\omega t) \tag{5}$$

a) Circuito con un resistor de resistencia R (figura 2.a): Aplicando la regla de Kirchhoff, instantáneamente en la malla tenemos que

$$v_F - iR = 0 \tag{6}$$

[3]La elección de los sentidos de circulación es análoga a la que se plantea en circuitos de corriente continua.

donde se han omitido las dependencias temporales por simplicidad. Reemplazando por (5) tenemos

$$i = \frac{v_F}{R} = \frac{V_F}{R}\ \sin(\omega t) \tag{7}$$

Homologando con la forma 2 tenemos

$$i(t) = I\ \sin(\omega t) \qquad I = \frac{V_F}{R} \tag{8}$$

donde I es la amplitud de la corriente y además puede observarse que la fase relativa de la corriente es nula. En tal sentido, se dice que en un resistor, la tensión y la corriente están en fase.

b) Circuito con un capacitor de capacidad C (figura 2.b): En este punto cabe una consideración sutil; la carga del capacitor varía con el tiempo en forma armónica, por lo que sus valores serán alternativamente positivos y negativos. Como las dos placas del capacitor siempre tienen cargas opuestas, hay que adoptar una de ellas como referencia para la carga. La convención que elegimos aquí, es medir la carga sobre la placa en la que la corriente entra cuando es positiva (recordar el sentido de circulación). Como ayuda, colocamos en el dibujo un asterisco en la placa elegida. Con la convención establecida, la relación entre la carga del capacitor y la corriente en la rama que lo contiene es

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{9}$$

Ahora aplicamos nuevamente la regla de Kirchhoff sobre la malla:

$$v_F - \frac{q}{C} = 0 \tag{10}$$

de donde se tiene que

$$q = C v_F = C V_F \sin(\omega t) \tag{11}$$

Entones la corriente será

$$i = \omega C V_F\ \cos(\omega t) \tag{12}$$

Buscamos ahora que la corriente tenga un formato análogo a la función (2). Así tenemos

$$i(t) = I\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad I = \omega C V_F \tag{13}$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $\pi/2$. En este sentido decimos que en una rama que contiene un capacitor, la corriente "adelanta" en $\pi/2$ respecto de la tensión.

Una magnitud muy práctica en la resolución de circuitos es la reactancia capacitiva χ_C que se define como

$$\chi_C = \frac{1}{\omega C} \tag{14}$$

Dejamos a cargo del estudiante probar que la unidad de esta magnitud coincide con la unidad de resistencia. Observe además que la relación entre las amplitudes de la tensión y la corriente toma la forma

$$I = \frac{V_F}{\chi_C} \tag{15}$$

c) Circuito con un inductor de autoinducción L (figura 2.c): Recordando la respuesta de los inductores (repasar ley de Faraday y autoinducción) tenemos por aplicación de la regla de Kirchhoff

$$v_F - L\,\frac{di}{dt} = 0 \tag{16}$$

Esta es una ecuación diferencial que puede resolverse fácilmente. En primer lugar la escribimos como sigue

$$di = \frac{1}{L} v_F(t)\ dt = \frac{V_F}{L} \sin(\omega t)\ \ dt \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Luego integramos en ambos miembros en forma indefinida

$$i = \frac{V_F}{L} \int \sin(\omega t)\ \ dt\ +\ constante \tag{19}$$

Con un cambio de variable muy simple tenemos que

$$i = -\frac{V_F}{\omega L} \cos(\omega t) + constante \tag{20}$$

Como la corriente debe tener la forma funcional (2), la constante debe ser nula. Así tenemos

$$i(t) = I\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad I = \frac{V_F}{\omega L} \tag{21}$$

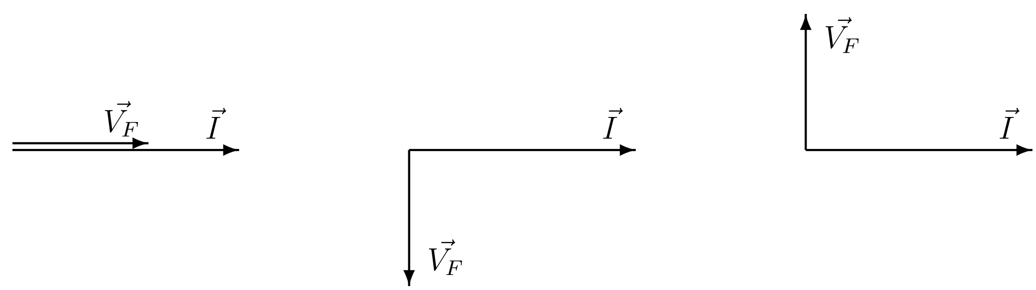
Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $-\pi/2$. Por esto decimos que en la rama que contiene a un inductor la corriente "atrasa" $\pi/2$ con respecto a la tensión. Aquí también es conveniente introducir la magnitud χ_L llamada reactancia inductiva, cuya definición es

$$\chi_L = \omega L \tag{22}$$

Nuevamente dejamos a cargo del lector probar que χ_L tiene unidades de resistencia. La relación entre las amplitudes de tensión y corriente es

$$I = \frac{V_F}{\chi_L} \tag{23}$$

Las representaciones fasoriales a $t = 0$ de estos circuitos elementales son las siguientes.



$FIGURA$ 3.a $FIGURA$ 3.b $FIGURA$ 3.c

4 El circuito RLC serie.

El circuito RLC serie se compone de un resistor, un capacitor y un inductor conectados en serie con la fuente de tensión alterna (figura 4).

Como se trata de un circuito serie, la corriente instantánea en cualquier punto del circuito debe ser la misma. Por simplicidad supondremos entonces que la fase inicial de la corriente es nula, y referiremos a ella todos los defasajes de las demás magnitudes oscilantes. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para los circuitos más elementales podemos escribir a priori la forma en que varían las tensiones en cada dispositivo. Esto es

$$i(t) = I \, \sin(\omega t) \tag{24}$$
$$v_F(t) = V_F \, \sin(\omega t + \phi) \tag{25}$$
$$v_R(t) = V_R \, \sin(\omega t) \tag{26}$$

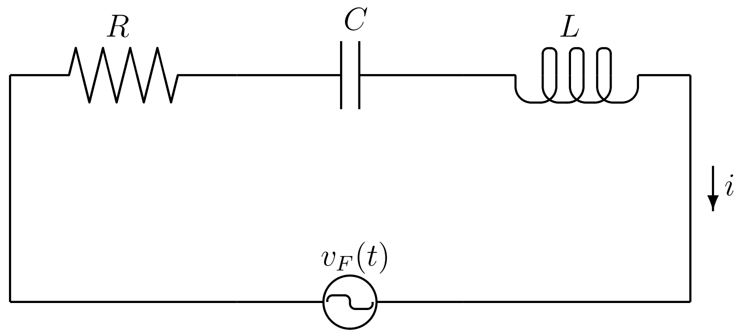
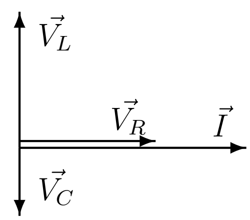


FIGURA 4

$$v_C(t) = V_C \ \sin(\omega t - \pi/2) \tag{27}$$

$$v_L(t) = V_L \ \sin(\omega t + \pi/2) \tag{28}$$

Las tensiones subindicadas corresponden a los terminales de cada dispositivo. La solución del problema consiste en establecer la amplitud I de la corriente, y la diferencia de fase ϕ entre la tensión v_F en terminales de la fuente y la corriente i del circuito. El correspondiente diagrama fasorial a $t = 0$ se muestra en la figura 5.a.



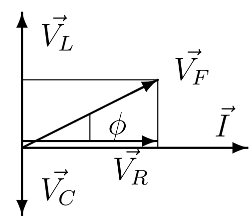


FIGURA 5.a *FIGURA* 5.b

La aplicación de la regla de Kirchhoff en un instante sobre el circuito conduce a

$$v_F - v_R - v_C - v_L = 0 \tag{29}$$

o bien

$$v_F = v_R + v_C + v_L \tag{30}$$

Invocando la naturaleza fasorial de las magnitudes en juego, podemos aplicar propiedades vectoriales. En particular, la componente y de la suma de tres vectores es igual a la suma de las componentes y de cada uno de ellos. La figura 5.b es idéntica a la 5.a, con el agregado del vector $\vec{V_F}$ que se obtiene como sigue

$$\vec{V_F} = \vec{V_R} + \vec{V_C} + \vec{V_L} \tag{31}$$

De la construcción geométrica se deduce que la relación entre módulos de los vectores anteriores es

$$V_F = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \tag{32}$$

mientras que la fase ϕ puede obtenerse de

$$tg\ \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} \tag{33}$$

Recordemos ahora las relaciones de amplitudes desarrolladas para los circuitos elementales

$$V_R = IR \qquad V_C = I\chi_C \qquad V_L = I\chi_L \tag{34}$$

Reemplazando en (32) tenemos que

$$V_F = \sqrt{I^2R^2 + (I\chi_L - I\chi_C)^2} \tag{35}$$

$$V_F = I\ \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \tag{36}$$

Así podemos determinar la amplitud de la corriente en términos de los datos del circuito. Aprovechamos la circunstancia para definir una magnitud llamada impedancia del circuito, y habitualmente representada por Z. Dicha magnitud en general relaciona las amplitudes de la tensión entre terminales de la fuente, con la corriente que circula por ella. Esto es

$$V_F = IZ \tag{37}$$

En nuestro caso particular, la impedancia es

$$Z = \ \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \tag{38}$$

Con un procedimiento análogo se obtiene la diferencia de fase ϕ. Reemplazando las relaciones (34) en (33) tenemos

$$tg\ \phi = \frac{I\chi_L - I\chi_C}{IR} = \frac{\chi_L - \chi_C}{R} \tag{39}$$

Cuando el ángulo ϕ toma valores positivos decimos que el circuito es inductivo. Por el contrario, si el ángulo ϕ es negativo se dice que el circuito es capacitivo. En el caso particular en que ϕ es nulo, decimos que el circuito está en resonancia.

5 Valores eficacaces.

El valor medio temporal de cualquier magnitud que oscila armónicamente, es nulo cuando se lo evalúa en un período de dicha oscilación. Por tanto, tal valor medio carece de interés como indicador para las magnitudes relevantes en corriente alterna. Un indicador no nulo es el llamado “valor eficaz”. Sea $u(t)$ una magnitud física oscilante. Su valor eficaz U_e se define como

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \tag{40}$$

En el caso de interés en corriente alterna, en que las magnitudes son del tipo (2), tenemos

$$U_e = \ U \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\omega t + \delta\right) dt} \tag{41}$$

La expresión que queda bajo la raiz cuadrada puede resolverse con un poco de trabajo, o puede encontrarse en una tabla[4]. Su valor es $1/2$, por lo que

$$U_e = \frac{U}{\sqrt{2}} \tag{43}$$

6 Potencia suministrada por la fuente de tensión alterna.

Las fuentes de tensión alterna no suministran energía a un ritmo constante, por lo que cabe definir una potencia instantánea dada por

$$p(t) = i_F(t)\ v_F(t) \tag{44}$$

No obstante, podemos establecer un valor medio significativo en virtud de la periodicidad de $p(t)$. Comencemos por recordar que para una función periódica en el tiempo con período T, el valor medio viene dado por

$$< U >= \frac{1}{T}\ \int_0^T u(t)dt \tag{45}$$

que en nuestro caso se convierte en

$$< P >= \frac{1}{T}\int_0^T i_F(t)\ v_F(t)\ dt \tag{46}$$

[4]En una tabla de integrales definidas, tendremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ \ dx \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ \ dx \ = \ \frac{1}{2} \tag{42}$$

Este resultado conviene recordarlo, ya que las integrales que pueden llevarse a esta forma aparecen muy frecuentemente en diversas áreas de la física y la ingeniería.

La situación más general será cuando exista un defasaje ϕ entre la tensión y la corriente, en cuyo caso tendremos

$$< P >= \frac{1}{T} \int_0^T I_F \sin(\omega t) \; V_F \sin(\omega t + \phi) \; dt \tag{47}$$

Recordemos aquí una propiedad de la suma de ángulos

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{48}$$

Aplicando esta propiedad tenemos

$$< P >= \frac{I_F V_F}{T} \left[\cos(\phi) \int_0^T \sin^2(\omega t) \; dt \; + \; \sin(\phi) \int_0^T \sin(\omega t) \; \cos(\omega t) \; dt \right] \tag{49}$$

La segunda integral es nula, mientras que la primera es análoga a la resuelta en la sección anterior. Finalmente tenemos

$$< P >= \frac{1}{2} \; I_F V_F \cos(\phi) \tag{50}$$

Recordando la definición de valor eficaz de una magnitud oscilante, podemos reescribir el último resultado como

$$< P >= I_{Fe} V_{Fe} \cos(\phi) \tag{51}$$

En terminología técnica, la magnitud cos(ϕ) se denomina factor de potencia del circuito. Observando los diagramas fasoriales de los circuitos elementales, vemos que el factor de potencia vale la unidad cuando el circuito es resistivo, y es nulo cuando el circuito es inductivo o capacitivo puro (ver figuras 3). En el circuito RLC el factor de potencia vale uno en la resonancia.