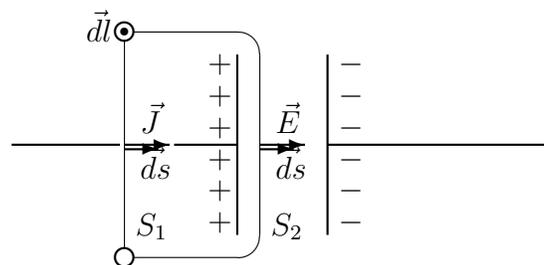


Capítulo 12

Ecuaciones de Maxwell.

1 Comencemos por una paradoja.

Cuando el desarrollo del electromagnetismo estaba bastante avanzado, los investigadores iban por más, hilando fino sobre las leyes ya establecidas. A esta altura de los acontecimientos, era importante determinar si las variaciones temporales del campo eléctrico eran fuentes de “algo”, tal como las variaciones del campo de inducción magnética lo eran en virtud de la ley de Faraday. Para analizar esto, podemos pensar en el más simple de los dispositivos que produce campos eléctricos variables: un capacitor en proceso de carga. Como la corriente de carga es variable con el tiempo, no estamos habilitados para aplicar la ley de Ampere (recordar que sólo puede aplicarse en magnetostática, donde las corrientes son estacionarias). Sin embargo, una práctica habitual consiste en “forzar” las leyes para evaluar si resisten una generalización. En este marco, consideremos el montaje formado por un capacitor y los conductores de alimentación que permiten su carga. Supongamos además que dicha carga está ocurriendo. Para aplicar la ley de Ampere, elegimos una curva cerrada C , que rodea a uno de los conductores. Como la ley involucra una superficie cualquiera limitada por la curva C , elegimos dos alternativas: la superficie S_1 que es atravesada por el conductor, y la S_2 que pasa por el espacio interior al capacitor (ver figura).



Aplicemos la ley de Faraday para ambas alternativas. En la primera el flujo a través de S_1 es mayor que cero debido a que \vec{J} es significativo sobre la sección del conductor. Por el contrario, el flujo sobre S_2 es nulo debido a que dicha superficie

no es atravesada por corrientes de conducción.

$$1) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} > 0 \quad (1)$$

$$2) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2)$$

Este resultado adverso, da por tierra con nuestro intento de generalizar la ley de Ampere. Basta este simple contraejemplo para decir que esta ley no admite ser utilizada en casos donde las corrientes varían con el tiempo¹. Esta paradoja podría considerarse como un disparador para lanzarse a una nueva búsqueda. Hay una ley faltante ...

2 Ley de Ampere-Maxwell.

La ley faltante la propuso Maxwell como una modificación de la ley de Ampere. El hallazgo fue de carácter especulativo, a diferencia de lo sucedido con las leyes previas en la historia del electromagnetismo. La especulación giró alrededor de las variaciones temporales del campo eléctrico, tal como parecía sugerir cierta “simetría” con la ley de Faraday. Aquí va una versión modernizada de la ley de Ampere-Maxwell

Consideremos una región del espacio en la que existen el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ y una distribución de corrientes $\vec{J}(\vec{r}, t)$, donde todas las magnitudes pueden variar con el tiempo. Sean C una curva cerrada cualquiera y S una superficie limitada por C . Sean $d\vec{l}$ un vector elemental, tangente a la curva C , y $d\vec{s}$ un vector elemental normal a la superficie S . Los vectores $d\vec{l}$ y $d\vec{s}$ se eligen de modo que cumplan con la regla de la mano derecha. Entonces, la circulación del campo de inducción magnética \vec{B} a lo largo de la curva C viene dada por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

Aquí introducimos nueva terminología. Recordemos que el flujo del vector \vec{J} a través de una superficie es lo que definimos como corriente I . A estas magnitudes las referiremos en adelante como densidad de corriente de conducción y corriente de

¹Aquí hay que ser cuidadoso. El contraejemplo no invalida la ley de Ampere, sino que indica que no puede generalizarse para hipótesis menos restrictivas. En efecto, la misma sólo puede ser usada en el contexto de la magnetostática.

conducción respectivamente. Observando la ley de Ampere-Maxwell, podemos escribir una forma de blsillo, introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento I_D , dada por

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (4)$$

Entonces la ley puede escribirse como

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 (I + I_D) \quad (5)$$

Siguiendo el camino de la analogía, podemos definir una densidad de corriente de desplazamiento \vec{J}_D como sigue

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Esta definición podría introducirse en la forma integral (3) de la ley de Ampere-Maxwell, imponiéndole la restricción de mantener la curva C y la superficie S invariantes en el tiempo². Entonces tenemos otra forma posible (aunque restringida) de la ley

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_D) \cdot \vec{ds} \quad (7)$$

La corriente de desplazamiento es una nueva magnitud física, cuya interpretación no es directa. En principio, decimos que es una corriente porque tiene unidades de corriente y opera al mismo nivel que la corriente de conducción en el marco de la teoría. Sin embargo, no implica el movimiento real de cargas. Por otra parte, podemos decir que tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento, pueden darse simyltáneamente en un mismo lugar del espacio, ya sea en el vacío como en los medios materiales.

En muchos casos las corrientes de conducción y de desplazamiento en un mismo lugar, difieren en varios órdenes de magnitud, por lo que una de ellas puede despreciarse frente a la otra. Citamos aquí dos ejemplos habituales.

a) Dentro de los conductores en régimen estacionario o cuando circulan corrientes de conducción de baja frecuencia, la corriente de desplazamiento puede despreciarse.

b) En el vacío libre de cargas y corrientes de conducción, dominará la corriente de desplazamiento.

²Con esta restricción sería lícito permutar el operador de derivación con la integral en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

3 Ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Los fenómenos electromagnéticos en el vacío pueden describirse completamente si en la región del espacio a estudiar, se especifican los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Estos campos pueden originarse en la existencia de cargas eléctricas, y en los movimientos de las mismas³. Tales “fuentes” se representan mediante las densidades de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ⁴. La relación espacio-temporal entre los campos (incluyendo el efecto de las fuentes), viene dada por las ecuaciones de Maxwell. En realidad, estas ecuaciones ya son bien conocidas para nosotros, pues provienen de evidencias experimentales y razonamientos teóricos vistos en capítulos anteriores. Sin embargo resulta muy instructivo observarlas en conjunto, para comprender la interrelación entre los campos. Presentaremos aquí sus formas integrales en el vacío, y pospondremos para un capítulo posterior el tratamiento de las formas diferenciales. Un detalle sutil consiste en observar que, aún cuando hablamos de vacío, incluimos las cargas y las corrientes. Ya sabemos que ellas requieren un sustrato material, como por ejemplo un electrón. Sin embargo, un electrón puede estar en el vacío, o inmerso dentro de un medio material. En este tratamiento descartamos los medios materiales que llenan el espacio (por eso decimos vacío), pero admitimos el sustrato material de las cargas.

Ahora preparamos la geometría para las ecuaciones de Maxwell. Consideremos que en cierta región del espacio conviven cargas (posiblemente en movimiento) con campos eléctrico y de inducción magnética. Supongamos que todo puede fluctuar en el tiempo. Necesitamos imaginar dos montajes en el vacío. 1) Sea C_1 una curva cerrada que resulta el límite de una superficie S_1 (naturalmente no cerrada). Llamamos $d\vec{l}_1$ a cada uno de los vectores infinitesimales tangentes a la curva C_1 , y $d\vec{S}_1$ a los vectores infinitesimales normales a la superficie S_1 . Recuerde que los sentidos de $d\vec{l}_1$ y $d\vec{S}_1$ deben satisfacer la regla de la mano derecha. Entonces podemos enunciar respectivamente las leyes de Faraday y Ampere-Maxwell.

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \quad (8)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \left[\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right] \quad (9)$$

En palabras la ley de Faraday nos dice que la circulación del campo eléctrico sobre la curva C_1 , es proporcional a la variación temporal del flujo magnético a través de

³Veremos más adelante que de las ecuaciones de Maxwell se desprenden otros orígenes posibles para los campos.

⁴Aquí la palabra “fuente” se utiliza en el sentido de causa (que de origen).

la superficie S_1 . Por su parte, la ley de Ampere-Maxwell expresa que la circulación del campo de inducción magnética a lo largo de la curva C_1 es proporcional a la suma de la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento a través de la superficie S_1 .

2) Sea S_2 una superficie cerrada que limita una región del espacio V_2 . Supongamos que $d\vec{S}_2$ representa cada vector infinitesimal normal exterior a la superficie S_2 , mientras que dV_2 se refiere a cada elemento de volumen de la región V_2 . Así las leyes de Gauss eléctrica y magnética son

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho dV_2 \quad (10)$$

$$(11)$$

$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (12)$$

La ley de Gauss para el campo eléctrico establece que el flujo de dicho campo a través de la superficie S_2 es proporcional a la carga residente en la región V_2 . La otra ley expresa que el flujo del campo de inducción magnética a través de S_2 es siempre nulo. Esta última ley suele nombrarse por una propiedad intrínsecamente contenida en ella, como ley de la no existencia de monopolos magnéticos.

4 El campo electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell ponen en evidencia que los campos eléctrico y de inducción magnética no son independientes, cuando experimentan cambios en el tiempo. Esto lleva a pensar que los fenómenos eléctricos y magnéticos son manifestaciones distintas que provienen de una raíz común. En este sentido decimos que la teoría electromagnética es unificadora. Siguiendo esta idea, se suele llamar campo electromagnético al par de campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Centremos nuestra atención en las ecuaciones de Maxwell. Observemos que las mismas valen aún cuando los campos y las fuentes dependen del tiempo. Esto sugiere implícitamente una extensión de la validez de algunas de las leyes a contextos más amplios que los estudiados inicialmente. Por ejemplo las ecuaciones (??) y (??) han sido introducidas en electrostática y magnetostática respectivamente, y sin embargo siguen valiendo en general. Estas extensiones no son triviales, sino que han exigido rigurosas verificaciones experimentales

5 Ecuaciones de Maxwell en el vacío libre de cargas y corrientes.

Una situación especialmente interesante se da cuando en cierta región del espacio existe campo electromagnético en ausencia de cargas y corrientes. En este caso, las ecuaciones de Maxwell toman las formas siguientes

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = - \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \quad (13)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \quad (14)$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (15)$$

$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (16)$$

En este punto podemos observar la gran simetría que presentan las ecuaciones, respecto de la forma en que relacionan los campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Esta simetría será de importancia crucial en las formulaciones modernas del electromagnetismo, y probablemente haya resultado inspiradora para la formulación de la teoría de la relatividad especial.

6 Formas diferenciales.

Hasta este punto, hemos tratado siempre con ecuaciones de Maxwell en su formato integral, que resulta muy aconsejable desde el punto de vista didáctico. Sin embargo, resulta operativamente conveniente escribirlas en un formato diferencial, donde campos y fuentes se relacionan localmente. Estas ecuaciones son mucho más versátiles, aunque su significado parece, a primera vista, algo más difícil de comprender.

Para pasar de las formas integrales a las diferenciales, utilizamos los teoremas integrales de Stokes y de Gauss. Bajo las mismas condiciones geométricas con las que enunciamos las ecuaciones de Maxwell, estos teoremas vienen dados por

$$\oint_{C_1} \vec{\eta} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{\eta}) \cdot d\vec{S}_1 \quad (17)$$

$$\oint_{S_2} \vec{\eta} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta}) dV_2 \quad (18)$$

donde $\vec{\eta}$ representa cualquier campo vectorial con debidas condiciones de regularidad. A continuación trataremos cada caso.

a) Leyes de circulación: comencemos por reconocer que en las leyes de Faraday (8) y Ampere-Maxwell (9), podemos intercambiar los operadores de derivación con las integrales, suponiendo que la curva C_1 y la superficie S_1 son fijas. En tal caso, los operadores pasan de derivadas totales a parciales. Entonces tendremos

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1 \quad (19)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_1 \quad (20)$$

Ahora aplicamos el teorema de Stokes (17) para convertir las integrales curvilíneas de los primeros miembros en integrales de superficie. Así tenemos

$$\int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}_1 = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1 \quad (21)$$

$$\int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_1 \quad (22)$$

Observando que los dominios de integración coinciden a ambos lados, tenemos

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0 \quad (23)$$

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0 \quad (24)$$

Aquí hay que observar cuidadosamente las expresiones. En general, que una integral valga cero, no implica que el integrando sea nulo. Pero en estos casos si lo es, porque debe cumplirse que la integral sea nula “para todos” los integrandos posibles, es decir, para todas las superficies S_1 que puedan definirse. Entonces tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (26)$$

que constituyen las formas diferenciales buscadas.

b) Leyes de flujo: este es el caso de las leyes de Gauss eléctrica (11) y magnética (12). Sobre ellas podemos operar directamente con el teorema de Gauss para convertir las integrales de superficie de los primeros miembros en integrales de volumen. Esto es

$$\int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV_2 = \int_{V_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV_2 \quad (27)$$

$$\int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV_2 = 0 \quad (28)$$

Las integrales de (27) tienen el mismo dominio de integración, por lo que pueden escribirse como sigue

$$\int_{V_2} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV_2 = 0 \quad (29)$$

Como las integrales de (29) y (28) deben anularse para todos los posibles dominios V_2 , sus integrandos deben ser nulos. Esto es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (30)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (31)$$

Estas últimas expresiones son las formas diferenciales buscadas.

Una síntesis organizada de las ecuaciones de Maxwell en sus formas diferenciales es la siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Las correspondientes versiones para el caso libre de cargas y corrientes son

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

donde se pone de manifiesto en forma aún más elocuente, la simetría entre los campos dentro de las ecuaciones.

7 Ondas electromagnéticas.

Para afrontar la deducción de la ecuación diferencial que describe las ondas electromagnéticas en el vacío, comenzamos por recordar una identidad vectorial

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\eta} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\eta}) \tag{34}$$

donde η representa un campo vectorial regular y $\vec{\nabla}^2$ es el operador laplaciano. Aplicando esta identidad a los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en el vacío libre de cargas y corrientes, tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})
\end{aligned} \tag{35}$$

donde utilizamos que en las condiciones mencionadas, las divergencias son nulas. Ahora reemplazamos los rotadores y luego permutamos los operadores espaciales y temporales. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= -\vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})
\end{aligned} \tag{36}$$

Finalmente, volvemos a reemplazar los rotadores, y operando obtenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{37}$$

Las ecuaciones diferenciales (37) son ecuaciones de onda en formato tridimensional. Pero aún falta analizar el factor que acompaña las derivadas temporales, que dicho sea de paso, es el mismo en ambos casos. En primer lugar, observemos que las constantes involucradas son ϵ_0 y μ_0 . La primera proviene de la base misma de la electrostática, mientras que la segunda surgió con los primeros fenómenos magnéticos. Nada parece indicar a priori, que entre ellas debiera haber alguna relación. Sin embargo, esconden una relación sorprendente. Desarrollemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} &= \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}}} = \\ &= \sqrt{\frac{9 \times 10^{16} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}}{\text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s m C}^{-1}\text{s}}} = \sqrt{9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (38)$$

Este resultado constituye nada menos que la rapidez de la luz en el vacío, a la que en lo sucesivo denotaremos por c .

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (39)$$

Con este resultado, las ecuaciones diferenciales de onda toman la forma siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (40)$$

8 Soluciones armónicas planas.

Las ecuaciones diferenciales de onda admiten soluciones tridimensionales múltiples, entre las que resulta especialmente simple la solución plana armónica dada por

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \\ \vec{B}(z, t) &= \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (41)$$

donde \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son las amplitudes de los campos eléctrico y de inducción magnética respectivamente, k es el número de onda, ω es la frecuencia angular y ϕ la fase inicial. Nótese que el eje z positivo se ha elegido (sin pérdida de generalidad) en la dirección y sentido de propagación de la onda. Apliquemos las ecuaciones de

Maxwell para establecer condiciones sobre las amplitudes. Veamos qué ocurre con las divergencias nulas. Como los campos dependen sólo de la coordenada z , tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{42}$$

Con esto, podemos asegurar que las componentes E_z y B_z no pueden depender de la coordenada z . Entonces la única posibilidad compatible con (41) es

$$E_z = 0 \quad B_z = 0\tag{43}$$

De este resultado concluimos que las ondas electromagnéticas planas son transversales. Supongamos entonces que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ está linealmente polarizado en la dirección del eje x . Entonces puede escribirse como sigue

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \check{i}\tag{44}$$

Buscaremos ahora, qué restricción imponen las ecuaciones de Maxwell sobre la amplitud del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Para ello utilizamos la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{45}$$

Desarrollemos el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \check{j}\tag{46}$$

Reemplazando en (45) y recordando que el campo \vec{B} no tiene componente B_z , tenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \check{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_x \check{i} + B_y \check{j})\tag{47}$$

de donde concluimos que

$$B_x = 0\tag{48}$$

y que

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\tag{49}$$

Las formas explícitas de las componentes no nulas son

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \\ B_y(z, t) &= B_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (50)$$

Resolviendo las derivadas de (49) tenemos

$$kE_0 \cos(kz - \omega t + \phi) = \omega B_0 \cos(kz - \omega t + \phi) \quad (51)$$

de donde concluimos que

$$kE_0 = \omega B_0 \quad (52)$$

Recordando que

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = f\lambda = c \quad (53)$$

encontramos una relación sumamente simple entre las amplitudes de campos.

$$E_0 = c B_0 \quad (54)$$

Nótese que esta relación puede extenderse al valor instantáneo de los campos

$$E_x(z, t) = c B_y(z, t) \quad (55)$$

9 Aspectos energéticos.

Para afrontar el análisis energético de los fenómenos electromagnéticos en el vacío, cuando en la región no hay ni cargas ni corrientes, deben considerarse las densidades volumétricas de energía residente en los campos. Dichas densidades en una posición y a un tiempo serán

$$u_e(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) \quad u_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \quad (56)$$

Siguiendo la misma línea, definimos la densidad de energía electromagnética en un punto y a un tiempo como

$$u_{em}(\vec{r}, t) = u_e(\vec{r}, t) + u_m(\vec{r}, t) \quad (57)$$

Hasta aquí, las definiciones son generales. Ahora trataremos el caso especial en que los campos se relacionan como los de una onda plana, según la relación (55). En estas condiciones, la densidad de energía magnética puede tratarse como sigue

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 E^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (58)$$

con lo que la densidad de energía electromagnética toma la forma simple siguiente

$$u_{em}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\vec{r}, t) \quad (59)$$

Ahora escribimos la densidad de energía electromagnética para el caso particular de una onda del tipo (41). Esto es

$$u_{em}(z, t) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega t + \phi) \quad (60)$$

El valor medio temporal de la densidad de energía en un punto, lo denotaremos por $\langle u_{em} \rangle$. El mismo viene dado por

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_{em} dt = \epsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kz - \omega t + \phi) dt \right] \quad (61)$$

para resolver la integral proponemos un cambio de variable dado por

$$v = kz - \omega t + \phi \quad dv = -\omega dt \quad (62)$$

Además observemos que

$$\omega T = 2\pi f \frac{1}{f} = 2\pi \quad (63)$$

entonces

$$\langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(v) dv \right] \quad (64)$$

Ésta es una integral tabulada muy frecuente, cuyo resultado es 1/2. Entonces concluimos que

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (65)$$

Observe que este resultado no depende de la posición. Esto no será así en general, sino que es una consecuencia de que la onda es plana e infinitamente extendida. Sin embargo, la forma de la expresión será válida, asumiendo que la dependencia espacial la tiene la amplitud E_0 .

10 Vector de Poynting

El vector de Poynting constituye un campo vectorial asociado al campo electromagnético que se define como

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (66)$$

Nosotros abordaremos su significado en relación con las ondas electromagnéticas planas. En este caso toma la forma

$$\vec{S}(z, t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(kz - \omega t + \phi) \check{k} \quad (67)$$

Nótese que el producto vectorial hace que el vector de Poynting adquiera la dirección y sentido de la propagación de la onda. Trabajemos ahora sobre el factor constante que acompaña al seno cuadrado. Utilizando (39) y (54) tenemos

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{c E_0^2}{\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 c E_0^2}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \quad (68)$$

con lo que el vector de Poynting toma la forma

$$\vec{S}(z, t) = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(kz - \omega t + \phi) \check{k} \quad (69)$$

Ahora analizamos el valor medio temporal del vector de Poynting. Para ello aplicamos la definición habitual

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \epsilon_0 c E_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kz - \omega t + \phi) dt \right] \check{k} \quad (70)$$

La integral del corchete es idéntica a la resuelta en (61), y su resultado vale 1/2. Entonces

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \check{k} \quad (71)$$

Aquí nuevamente obtenemos un resultado independiente de la posición que no puede ser tratado como general, sino que sólo será válido para el caso de ondas planas. Ahora indagemos un poco sobre su significado. Para ello imaginemos que la onda viene propagándose, de modo que ya ha avanzado sobre el semiespacio $z < 0$. Entonces el primer frente de onda se encuentra en el plano $z = 0$. Para fijar ideas, tomemos un círculo de área A contenido en el primer frente de onda y centrado en el eje z . Cuando la onda avanza durante un tiempo Δt , el círculo viaja con el frente de onda una distancia $c \Delta t$. Todos los puntos por los que pasó el círculo, forman un cilindro de área A y longitud $c \Delta t$, dentro del cual ahora oscilan los campos \vec{E} y \vec{B} ,

dando lugar a una densidad volumétrica de energía cuyo valor medio temporal en cada punto viene dado por (65). Si Δt es bastante grande comparado con el período T de oscilación de los campos, la energía residente en el volumen cilíndrico es

$$U_{em} = \langle u_{em} \rangle Ac \Delta t = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 Ac \Delta t \quad (72)$$

Pero la energía residente en el volumen cilíndrico coincide con la que atravesó el círculo original en el tiempo Δt . Por tanto, si quisieramos saber la energía que atravesó el círculo por unidad de área y unidad de tiempo, hacemos

$$\frac{U_{em}}{A \Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad (73)$$

Comparando este resultado con (71) podemos construir una interpretación física del valor medio temporal del vector de Poynting. El módulo de dicho vector representa la densidad media de flujo de energía transportada por la onda, por unidad de área y unidad de tiempo.