Capítulo 4
Potencial electrostático.

1 Repaso sobre conceptos mecánicos básicos.

a) Trabajo: Supongamos que una partícula se encuentra en una región del espacio en la que existe un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sean $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ las posiciones de dos puntos de la región, y sea C una curva simple orientada, que comienza en $\vec{r_1}$ y termina en $\vec{r_2}$. Ahora subdividimos la curva en segmentos diferencialmente pequeños. En cada uno de dichos segmentos, definimos un vector $\vec{dl}$ cuyo módulo coincide con la longitud del segmento, su dirección es tangente a la curva C en el segmento y su sentido coincide con la orientación de la curva. Supongamos ahora que la partícula se mueve sobre C desde $\vec{r_1}$ hasta $\vec{r_2}$[1]. Entonces definimos el trabajo

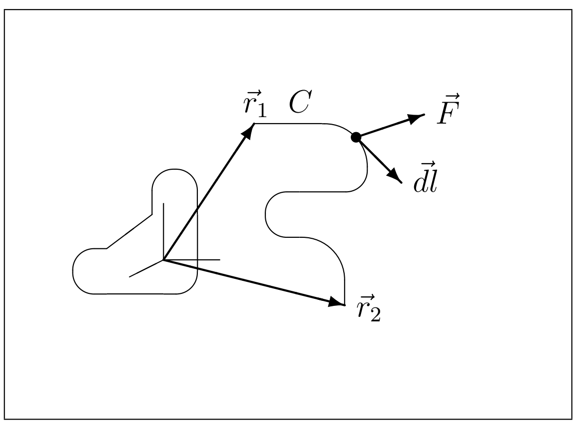

Figure 1: Escenario para la definición del trabajo de una fuerza. Se trata de una curva C que se extiende entre los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Sobre ella se definen los vectores tangentes $\vec{dl}$.

asociado a la fuerza $\vec{F}$ realizado sobre la partícula a lo largo de la curva C como

$$W_{\vec{F}C} = \int_{C\ \vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{1}$$

Como ejemplo consideremos el caso en que una fuerza constante actua sobre una partícula que se mueve en línea recta. Si elegimos que la trayectoria de la partícula coincida con el eje x, y que su desplazamiento comience en $x = 0$ y termine en $x = d$, tendremos que los vectores $\vec{dl}$ serán de la forma

[1] En la mayor parte de los casos será necesario que actuen otras fuerzas además de $\vec{F}$ para que la partícula recorra una curva especificada. Sin embargo, no resulta relevante la existencia de estas fuerzas para los objetivos de esta sección.

$$\vec{dl} \;=\; (dx, 0, 0) \tag{2}$$

Entonces el trabajo de la fuerza F sobre la partícula será

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_{C\;\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_0^d (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, 0, 0) \tag{3}$$

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_0^d F_x \, dx \;=\; F_x \int_0^d dx \;=\; F_x d \tag{4}$$

Esta última expresión es ampliamente difundida en textos básicos de física, por lo que conviene recalcar que sólo constituye un resultado particular cuya aplicabilidad es muy limitada.

b) Fuerzas conservativas: Consideremos nuevamente un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ y una partícula bajo su influencia. Consideremos también una curva simple cerrada C, sobre la que la partícula es obligada a moverse. Entonces, si para toda curva cerrada C el trabajo de $\vec{F}$ sobre la partícula es nulo,

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} \;=\; 0 \tag{5}$$

decimos que $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas. Una consecuencia inmediata con grandes ventajas operativas puede obtenerse por aplicación del teorema de Stokes. Esto es, $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas si y sólo si en toda la región vale que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \;=\; 0 \tag{6}$$

Entre los ejemplos más básicos de fuerzas conservativas podemos citar la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra sobre los objetos de su entorno, y la fuerza elástica ejercida por un resorte sobre un objeto acoplado a él.

El término "fuerza conservativa" alude al hecho que las fuerzas que poseen esta propiedad no operan en detrimento de la energía mecánica de la partícula, y por tanto cabe caracterizarlas como que "conservan" dicha energía.

c) Independencia de caminos: Una consecuencia inmediata de la definición de fuerza conservativa es la independencia de caminos. Sean C_a y C_b dos curvas cualesquiera, tales que ambas comienzan en $\vec{r_1}$ y terminan en $\vec{r_2}$. Entonces, Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas se cumple que

$$W_{\vec{F}C_a} \;=\; W_{\vec{F}C_b} \qquad\qquad \int_{C_a\;\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_{C_b\;\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{7}$$

d) Energía potencial: Si un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo, entonces es posible definir una energía potencial $U_{\vec{F}}$ asociada a dicho campo, tal que

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla} U_{\vec{F}} \tag{8}$$

Una representación del gradiente en coordenadas cartesianas será

$$\vec{F} \;=\; -\left(\frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial x} \,,\, \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial y} \,,\, \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial z} \right) \tag{9}$$

En los ejemplos mencionados de fuerzas conservativas, puede observarse esta relación. Para la fuerza gravitatoria $\vec{P}$ (en notación habitual) tenemos que

$$U_{\vec{P}} \;=\; mgy \qquad \rightarrow \qquad \vec{P} \;=\; (0 \,,\, -mg \,,\, 0) \tag{10}$$

Por su parte, en el caso de la fuerza elástica de un resorte se cumple que

$$U_{\vec{F}e} \;=\; \frac{1}{2} k x^2 \qquad \rightarrow \qquad \vec{F}e \;=\; (-kx \,,\, 0 \,,\, 0) \tag{11}$$

Ahora proponemos una definición formal para la energía potencial, a partir del campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sea $\vec{r}_{REF}$ un punto arbitrariamente elegido en la región donde existe el campo de fuerzas conservativas $\vec{F}(\vec{r})$. A dicho punto lo llamaremos en lo sucesivo “punto de referencia”. Sea $\vec{r}$ un punto genérico de la misma región y sea C una curva cualquiera que se inicia en $\vec{r}_{REF}$ y termina en $\vec{r}$. Supongamos ahora que una partícula es transportada cuasiestáticamente a lo largo de C bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$ y otra que la contrarresta punto a punto $\vec{F}_{EXT}$ ejercida por un agente externo de modo que

$$\vec{F}_{EXT}(\vec{r'}) \;=\; -\vec{F}(\vec{r'}) \tag{12}$$

para todos los puntos $\vec{r'}$ pertenecientes a C. Entonces, la energía potencial $U_{\vec{F}}(\vec{r})$ asociada a la fuerza $\vec{F}$, adquirida por la partícula cuando la misma se encuentra en el punto $\vec{r}$, coincide con el trabajo que debe realizar el agente externo para transportar cuasiestáticamente la partícula desde el punto de referencia hasta el punto $\vec{r}$.

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \;=\; W_{\vec{F}_{EXT} C} \;=\; \int_{C\ \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dl} \tag{13}$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \;=\; -W_{\vec{F} C} \;=\; -\int_{C\ \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{14}$$

e) Extensiones terminológicas: En el mundo matemático se ha adoptado la terminología surgida de la mecánica para aplicarla a campos en general. Así

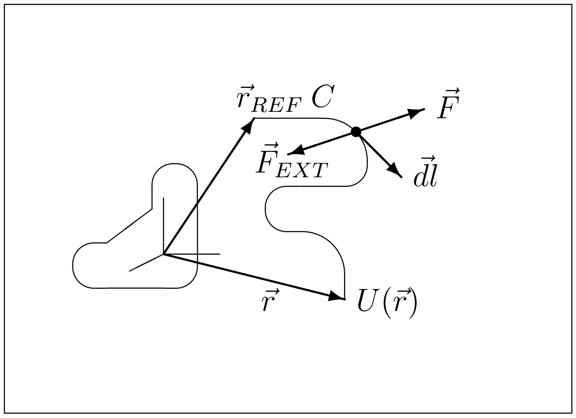

Figure 2: Escenario para la definición de la energía potencial. Se trata de una curva C que comienza en la posición de referencia $\vec{r}_{REF}$ y termina en $\vec{r}$. La energía potencial es el trabajo cuasi-estático de la fuerza $\vec{F}_{EXT}$.

tendremos que si un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ de cualquier naturaleza se lo llamará "conservativo", si para toda curva cerrada C satisface

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{15}$$

Entonces existirá un campo escalar $h_{\vec{A}}(\vec{r})$ llamado generalmente "potencial" asociado al campo $\vec{A}$, que satisface

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} h_{\vec{A}} \tag{16}$$

Sugerimos que el lector reflexione sobre la terminología, porque la misma se presta a confusiones, especialmente cuando la naturaleza del campo vectorial ya no pueda identificarse con una fuerza.

2 ¿Será conservativa la fuerza electrostática?

Para contestar esta pregunta podríamos proceder de un modo muy simple, evaluando el rotor del campo electrostático producido por una carga puntual. En primer lugar observemos que el campo electrostático producido por una carga puntual tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\breve{r} \tag{17}$$

Cuando los campos presentan estos tipos de simetría se los llama "Campos Centrales". Teniendo en cuenta la definición de rotor en coordenadas esféricas se deduce que el mismo es nulo en todas partes. Luego extendemos esta conclusión mediante el principio de superposición, al campo producido por cualquier distribución de cargas. Con lo que se concluye que el campo electrostático es conservativo.

Ahora recordemos que la fuerza electrostática sobre una partícula con carga q, esta relacionada con el campo electrostático mediante

$$\vec{F} \;=\; q\vec{E} \tag{18}$$

Entonces, es inmediato que si $\vec{E}$ es un campo conservativo, la fuerza F también lo será.

3 Energía potencial electrostática.

Como la fuerza electrostática es conservativa, debe existir una energía potencial electrostática asociada que satisfaga

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla}U_{\vec{F}} \tag{19}$$

Siguiendo los lineamientos sugeridos para fuerzas conservativas en general, podemos definir la energía potencial electrostática como sigue. Sean $\vec{r}_{REF}$ y $\vec{r}$ un punto de referencia y un punto genérico respectivamente. Supongamos que una partícula cargada es trasladada desde $\vec{r}_{REF}$ hasta $\vec{r}$ bajo la acción de un campo electrostático y un agente externo. Entonces la energía potencial electrostática adquirida por la partícula al alcanzar el punto $\vec{r}$, es igual al trabajo realizado por el agente externo para transportarla cuasiestáticamentente a lo largo de cualquier curva desde $\vec{r}_{REF}$ hasta $\vec{r}$

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \;=\; W_{\vec{F}_{EXT}C} \;=\; \int_{C\ \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{F}_{EXT}\cdot\vec{dl} \tag{20}$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \;=\; -W_{\vec{F}C} \;=\; -\int_{C\ \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\vec{dl} \tag{21}$$

4 Concepto de potencial electrostático.

Ahora centremos nuestra atención en que el campo electrostático es conservativo. Entonces debe existir un potencial electrostático asociado (Campo escalar), al que llamaremos $V(\vec{r})$, que debe cumplir

$$\vec{E} \;=\; -\vec{\nabla}V \tag{22}$$

La definición de V es análoga a la de $U_{\vec{F}}$, y por tanto puede calcularse a partir del campo electrostático $\vec{E}$ como sigue

$$V(\vec{r}) \; = \; -\int_{C \; \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{23}$$

Observe que multiplicando ambos miembros por la carga de la partícula se puede recuperar la expresión para la energía potencial electrostática. En tal sentido, podemos decir que el potencial electrostático es una propiedad del espacio que representa la energía potencial electrostática por unidad de carga que habría de adquirir una partícula cargada que se sitúa en el punto considerado. La unidad de potencial electrostático es el "Volt" (o Voltio) que se representa por la letra V. Su relación con las otra unidades del sistema MKS es

$$V \; = \; \frac{J}{C} \; = \; \frac{Nm}{C} \tag{24}$$

Aquí conviene enfatizar que el potencial, de la misma manera que el campo electrostático, constituye una propiedad del espacio. Esto significa que será necesario que algún objeto sensible se sitúe en el espacio dotado de un potencial electrostático, para que se verifiquen efectos observables.

Por último observemos que la expresión (23) constituye un método de cálculo para el potencial electrostático. En efecto, si se ha determinado el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un conjunto conexo de puntos que contenga a $\vec{r}_{REF}$ y a $\vec{r}$, la mencionada expresión permite calcular $V(\vec{r})$. Sin embargo, este no es el único método, ya que el potencial también puede deducirse a partir del conocimiento detallado de la distribución de cargas.

5 Superficies equipotenciales.

El potencial electrostático es una propiedad escalar continua, definida en el espacio tridimensional. Como ocurre siempre con los campos escalares tridimensionales regulares, es posible definir una familia de superficies llamadas equipotenciales, donde cada una de ellas está formada por puntos de igual potencial. Esto es

$$S_{V_0} \; = \; \{\vec{r} \; / \; V(\vec{r}) = V_0\} \tag{25}$$

donde S_{V_0} representa la superficie en que todos los puntos que la componen tienen potencial V_0.

Si una partícula se desplaza sobre una superficie equipotencial, su energía potencial electrostática se mantiene constante. Esto significa que la fuerza eléctrica que actúa sobre ella no hace trabajo. Esto sólo puede darse si la fuerza, y por añadidura el campo, resultan perpendiculares a la superficie. La conclusión que se desprende de este razonamiento, es que las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo.

Como ejemplo elemental podemos citar el caso de una carga puntual, en que las líneas de campo son radiales. Entonces las superficies equipotenciales son esféricas.

6 Elección de referencias.

El potencial electrostático está definido a menos de una constante aditiva. Esto ocurre porque los potenciales que difieren sólo en una constante aditiva, tienen las mismas derivadas, y por tanto conducen al mismo campo electrostático. Esta arbitrariedad permite que podamos elegir la posición de referencia $\vec{r}_{REF}$ de la manera más conveniente. Naturalmente, tal conveniencia debe analizarse de acuerdo a la simplicidad matemática de los cálculos que hemos de realizar.

Ahora recordemos algo que suele olvidarse en la práctica cotidiana de la física. Una cosa es el mundo real y otra cosa son los modelos que utilizamos para su representación. Esto parecerá obvio, pero aquí no podemos correr riesgos conceptuales. Entonces va una definición: decimos que una distribución de cargas es finitamente confinada, si existe una esfera imaginaria de radio finito tal que la distribución sea interior a la misma. Es evidente que "todas" las distribuciones reales de carga caben en esta definición, por lo que la misma parecería superflua. Sin embargo, en el mundo de los modelos pasan cosas raras. Por ejemplo existen planos infinitos uniformemente cargados, hilos rectos infinitamente largos (también con carga), etc. Y estos sí quedan fuera de la definición. Y como nuestras cuentas viven en el mundo de los modelos, la definición es relevante.

Ahora estamos en condiciones de recomendar una elección apropiada. Si la distribución de cargas es finitamente confinada, es muy práctico elegir la posición de referencia en el infinito. Esto es que

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} V(\vec{r}) = 0 \tag{26}$$

Esta elección puede hacerse porque el potencial en el infinito adquiere el mismo valor por cualquier camino por el que nos alejemos de la distribución de cargas.

Ahora trataremos otras cuestiones que "sólo" pueden ocurrir en los modelos. En efecto, algunos modelos incluyen puntos en que la densidad de carga es infinita. Este es el caso de cargas puntuales, hilos (tratados como soportes unidimensionales de carga), y hojas (modeladas como soportes bidimensionales de carga). En particular, las posiciones en que hay cargas puntuales o hilos cargados, no admiten ser elegidas como referencia para el potencial. Esto se debe a que el potencial diverge (tiende a infinito) en dichos puntos. Observe que las distribuciones superficiales de carga no tienen este problema, por lo que están habilitadas como posibles referencias.

En resumen la elección del punto de referencia puede hacerse:
a) En cualquier punto de posición finita en el vacio.
b) En el infinito, si el sistema de cargas es finitamente confinado.
c) Sobre la distribución de cargas, excepto cuando sean cargas puntuales o distribuciones de carga unidimensionales.

7 Potencial asociado a una partícula puntual cargada.

Consideremos una partícula puntual que utilizaremos para modelar un pequeño cuerpo que posee una carga neta Q. Comencemos por elegir el origen de coordenadas sobre la partícula, por lo que su campo electrostático se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \tag{27}$$

Nos proponemos determinar el potencial $V(\vec{r})$ en un punto arbitrario $\vec{r}$ del espacio. Entonces tenemos que elegir una referencia apropiada. Como la distribución es finitamente confinada, elegimos la referencia en infinito. Esto es $|\vec{r}_{REF}| \to \infty$. Ahora observamos que una curva muy apropiada para recorrer desde $\vec{r}_{REF}$ hasta $\vec{r}$ es la semirrecta radial que nace en $\vec{r}$ y se extiende hasta el infinito, tomando valores crecientes de la coordenada radial r (que para no confundirla con el módulo del vector $\vec{r}$ la llameremos r''). Entonces los elementos de la curva pueden parametrizarse como

$$\vec{dl} = -dr''\breve{r} \tag{28}$$

donde el signo menos se debe a que la curva será recorrida en sentido contrario al sentido de crecimiento del parámetro r''.

Ahora estamos en condiciones de calcular el potencial

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_{r}^{\infty} \frac{kQ}{r''^2}\breve{r}\cdot(-dr''\breve{r}) \tag{29}$$

En esta última expresión, suele ocurrir cierta confusión debida al aspecto de los límites de integración. Aquí pareciera que hemos invertido los límites. Sin embargo esto no es así. Lo que ocurre es que la primera integral es del tipo curvilínea, mientras que la segunda es ordinaria, y como tal debe ser recorrida en el sentido en

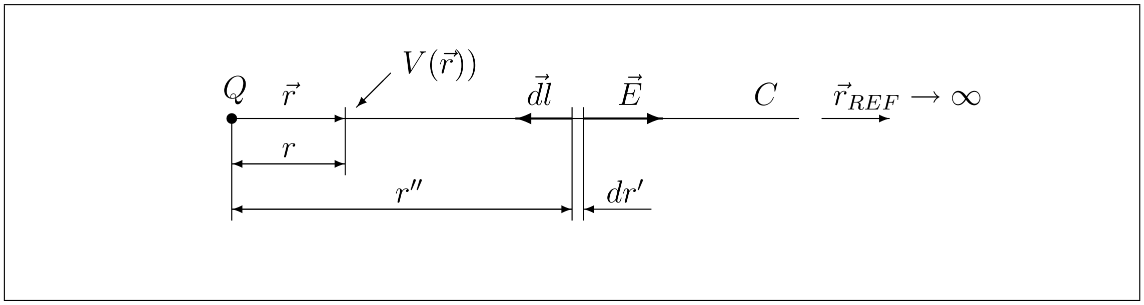

Figure 3: Esquema de los elementos geométricos necesarios para desarrollar el potencial de una partícula puntual cargada. La partícula se encuentra en el origen y el parámetro r'' recorre la semirrecta que viene radialmente desde el infinito hasta $\vec{r}$.

que crece el parámetro r''. El recorrido sobre la curva en sentido contrario ha sido tenido en cuenta en la parametrización de $\vec{dl}$.

Ahora resolvemos la integral

$$V(\vec{r}) \ = \ kQ \int_r^{\infty} \frac{dr''}{r''^2} \ = \ kQ \ \left[-\frac{1}{r''} \right]_r^{\infty} \tag{30}$$

con lo que obtenemos

$$V(\vec{r}) \ = \ \frac{kQ}{r} \tag{31}$$

Recordemos que este resultado fue desarrollado para una partícula puntual cargada situada en el origen, eligiendo la referencia para el potencial en el infinito. Una extensión inmediata para el caso en que la partícula esté situada en la posición genérica $\vec{r'}$ será

$$V(\vec{r}) \ = \ \frac{kQ}{\left| \vec{r} - \vec{r'} \right|} \tag{32}$$

8 Potencial de una distribución de cargas.

El paso siguiente consiste en encontrar el potencial producido por una distribución de cargas. Pueden darse dos casos y sus combinaciones. En primer lugar, supongamos que la distribución está formada por una colección finitamente confinada de partículas puntuales cargadas. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ las cargas residentes en

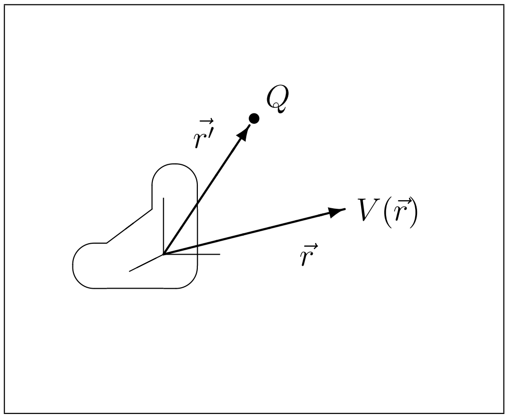

Figure 4: Esquema de los vectores involucrados en el potencial producido por una partícula cargada. Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ representan las posiciones de la partícula y de la posición donde se evalúa el potencial respectivamente.

las partículas situadas en las posiciones $\vec{r'}_1, \vec{r'}_2, ..., \vec{r'}_n$ respectivamente. Entonces el potencial se obtiene por simple superposición

$$V(\vec{r}) \;=\; k \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\mid \vec{r} - \vec{r'}_i \mid} \tag{33}$$

donde la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito (por lo que rige la restricción de confinamiento finito).

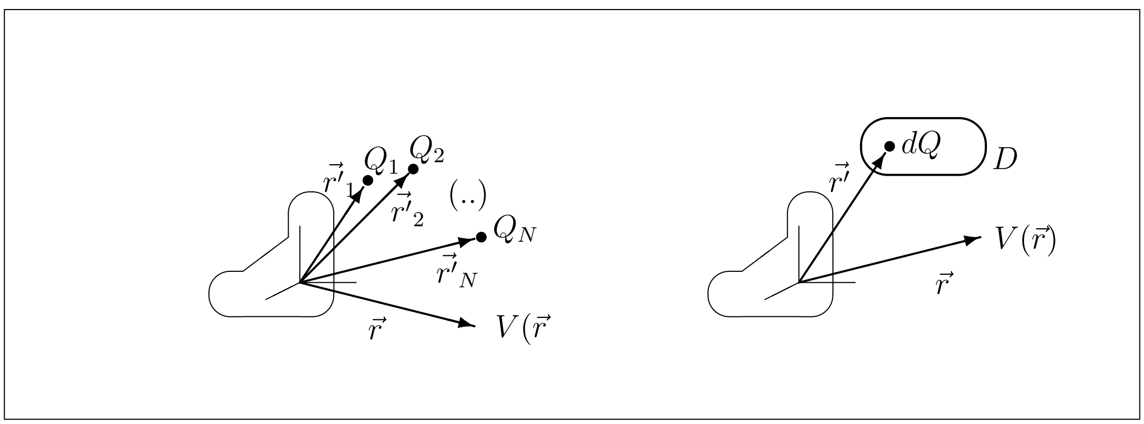

Figure 5: Los esquemas representan los escenarios para la determinación de potenciales producidos por distribuciones de cargas. El esquema de la derecha corresponde al caso discreto, y el de la izquierda al caso continuo.

Ahora analizamos el caso en que la distribución es continua. En este caso siempre es posible subdividir el dominio D en que residen las cargas, en elementos de tamaño diferencial que admiten ser tratados como cargas puntuales. Sea dq la carga residente en un elemento del dominio D, cuya posición es $\vec{r'}$. Entonces el potencial en $\vec{r}$ será

$$V(\vec{r}) \ = \ k \int_D \frac{dq}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \tag{34}$$

Nuevamente, la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito, por lo que el dominio D debe ser finitamente confinado. Como habíamos visto en el cálculo del campo electrostático, el dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Entonces el diferencial de carga dQ debe ser reemplazado en la integral, con el mismo criterio discutido para el campo.

9 Ejemplo: Potencial en el eje de un anillo.

Este ejemplo es sumamente esclarecedor, dado que permite ser resuelto, tanto por integración del campo electrostático, como a partir de la distribución de fuentes. Dado que la distribución de cargas es finitamente confinada, es apropiado elegir la referencia de potencial en el infinito (Si no fuera así, no sería posible la segunda variante). A continuación analizamos ambas posibilidades.

a) Como ya hemos deducido, el campo electrostático en el eje de un anillo de radio R, que posee una carga Q uniformemente distribuida, viene dado por

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \ \breve{k} \tag{35}$$

Elegimos como curva de integración la semirrecta que se deasarrolla sobre el eje z, desde $\vec{r} = (0,0,z)$ hasta infinito. Por supuesto, el recorrido se hará en sentido contrario, es decir desde infinito a $\vec{r}$. Para no confundir el parámetro de integración con la posición del punto de llegada, decimos que la coordenada que corre a lo largo de la semirrecta se llama z''. Entonces un elemento de dicha recta será

$$\vec{dl} \ = \ -dz'' \breve{k} \tag{36}$$

donde el signo menos pone de manifiesto que la curva se recorre acercándose al origen. Entonces el potencial será

$$V\,(0,0,z) \ = \ -\int_{C \ \vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \ = \ -\int_z^\infty \frac{kQz''}{\left(R^2 + z''^2\right)^{3/2}} \ \breve{k} \cdot \left(-dz'' \breve{k}\right) \tag{37}$$

Resolviendo el producto escalar tenemos

$$V\,(0,0,z) \ = \ kQ \int_z^\infty \frac{z''\,dz''}{\left(R^2 + z''^2\right)^{3/2}} \tag{38}$$

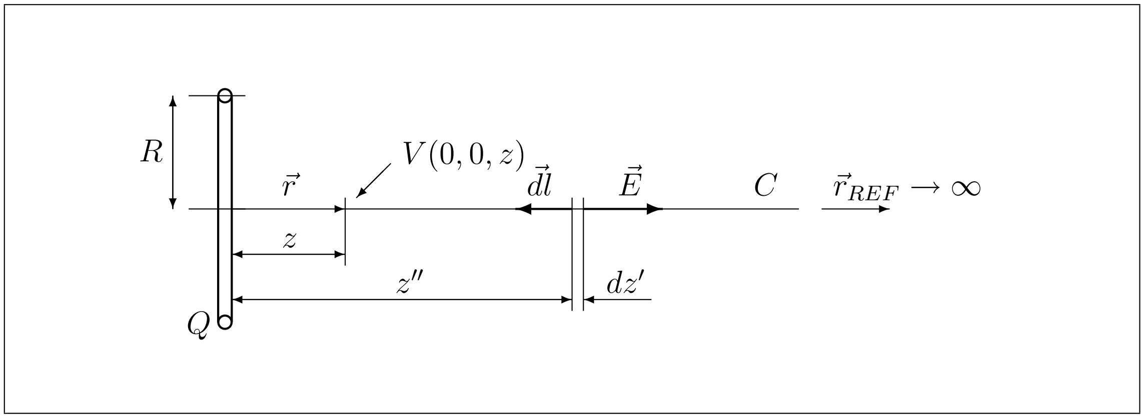

Figure 6: El esquema representa un anillo situado en un plano perpendicular al papel. El origen está en el centro del anillo y el eje z va horizontalmente. Observe cuidadosamente las notaciones.

La integral se resuelve fácilmente por sustitución haciendo

$$u \;=\; R^2 + z''^2 \qquad \rightarrow \qquad du \;=\; 2z''\, dz'' \tag{39}$$

Entonces

$$V\,(0,0,z) \;=\; \frac{kQ}{2} \int_{R^2+z^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} \;=\; \frac{kQ}{2}\, \frac{2}{\sqrt{\,R^2+z^2}} \tag{40}$$

O en forma más compacta

$$V\,(0,0,z) \;=\; \frac{kQ}{\sqrt{\,R^2+z^2}} \tag{41}$$

b) Ahora repetimos el cálculo a partir de la distribución de carga. Para ello utilizamos la integral sobre el dominio de la distribución, que para este caso toma la forma

$$V\,(0,0,z) \;=\; k \int_D \frac{dQ}{\left|\, \vec{r} - \vec{r'}\, \right|} \;=\; k \int_D \frac{dQ}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} \tag{42}$$

donde se ha observado que el denominador del integrando es simplemente la distancia entre un elemento del anillo y el punto $(0,0,z)$. Como tal distancia es invariante en el proceso de integración, puede ser tratada como una constante. Entonces

$$V\,(0,0,z) \;=\; \frac{k}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} \int_D dQ \tag{43}$$

La integral remanente puede interpretarse como la carga total del anillo, por lo que concluimos que

$$V(0,0,z) \;=\; \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{44}$$

que coincide con el resultado de la parte a.

El lector podrá apreciar que la segunda resolución es claramente más sencilla que la primera. Esto no siempre es así, por lo que sugerimos que se ejercite mucho sobre este tipo de resoluciones, hasta adquirir experiencia para elegir el camino.

10 Energía potencial de un sistema de partículas cargadas.

Consideremos un sistema de partículas con cargas $Q_1, Q_2, ..., Q_N$, rígidamente emplazadas en posiciones $\vec{r'}_1, \vec{r'}_2, ..., \vec{r'}_n$. La energía potencial electrostática que posee el sistema, por definición, coincide con el trabajo cuasiestático hecho por agentes externos para "construirlo". En otras palabras, es el trabajo que hubo que hacer para tranportar cada partícula desde el infinito hasta su posición $\vec{r'}_i$. Para calcular estos trabajos, pensemos que el proceso es secuencial. Primero supongamos que todas las partículas están en el infinito. Para traer la primera, no hay que enfrentar ningún campo, por lo que el trabajo es nulo. Así situamos la partícula 1 en $\vec{r'}_1$. Ahora hay que trer la partícula 2 hasta $\vec{r'}_2$. Entonces nos enfrentamos al campo producido por la 1. Si logramos instalar la 2 en su posición definitiva, habremos realizado un trabajo igual a la energía potencial adquirida por el sistema de dos partículas. Esto es

$$U_{12} \;=\; \frac{kQ_1Q_2}{\left|\,\vec{r'}_2 - \vec{r'}_1\,\right|} \tag{45}$$

Al traer la tercera partícula, el recorrido debe hacerse bajo la influencia de las dos primeras. Y así sucesivamente hasta completar el procedimiento. En la tabla siguiente, mostramos los trabajos involucrados en cada traslado

$$
\begin{aligned}
&Particula\ 1: \quad 0 \\
&Particula\ 2: \quad \frac{kQ_1Q_2}{\mid \vec{r'}_2 - \vec{r'}_1 \mid} \\
&Particula\ 3: \quad \frac{kQ_1Q_3}{\mid \vec{r'}_3 - \vec{r'}_1 \mid} + \frac{kQ_2Q_3}{\mid \vec{r'}_3 - \vec{r'}_2 \mid} \\
&Particula\ 4: \quad \frac{kQ_1Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_1 \mid} + \frac{kQ_2Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_2 \mid} + \frac{kQ_3Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_3 \mid} \\
&... \\
&Particula\ N: \quad \frac{kQ_1Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_1 \mid} + \frac{kQ_2Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_2 \mid} + \frac{kQ_3Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_3 \mid} + ... + \frac{kQ_{N-1}Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_{N-1} \mid}
\end{aligned} \tag{46}
$$

La energía potencial adquirida por el arreglo final es la suma de todos los trabajos realizados en el proceso constructivo. Observe que la suma de todos los términos de la tabla puede sintetizarse como sigue

$$
U = \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{kQ_iQ_j}{\mid \vec{r'}_j - \vec{r'}_i \mid} \tag{47}
$$