**Capítulo 6**
**Capacidad y capacitores**

# 1 Concepto de capacidad.

Hasta este punto, hemos aprendido que en condiciones electrostáticas, los cuerpos conductores resultan "volúmenes equipotenciales". Ahora nos proponemos analizar la relación existente entre el potencial adquirido por un cuerpo conductor, y la carga neta residente en su superficie. A modo introductorio, recordemos que una esfera de radio $R$ que posee una carga $Q$, adquiere un potencial $V$ (respecto del infinito) dado por

$$V = \frac{kQ}{R} \tag{1}$$

Esta expresión permite observar una propiedad que se repite en todos los cuerpos, que podría sintetizarse como sigue: El potencial observado sobre el cuerpo (respecto del infinito), es proporcional a la carga que posee. La diferencia que presentan los cuerpos respecto de esta propiedad, queda siempre restringida a la constante de proporcionalidad. Entonces cabe definir una magnitud característica del cuerpo, asociada con dicha constante, llamada "capacidad". La misma se representa por $C$ y se define como el cociente entre la carga $Q$ residente en el cuerpo y el potencial $V$ adquirido por el mismo.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2}$$

Esta definición permite evaluar la capacidad a partir de las mediciones simultáneas de carga y potencial sobre el cuerpo. Sin embargo la capacidad contiene sólo información geométrica acerca del cuerpo. Por ejemplo en el caso de la esfera tenemos

$$C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \tag{3}$$

En otras palabras, la capacidad es una propiedad intrínseca del cuerpo, y por tanto inalterable mientras el cuerpo no experimente modificaciones geométricas[1].

[1]El factor $\epsilon_0$ que aparece en el ejemplo de la esfera, también aparece en todos los cuerpos conductores. El mismo debe interpretarse como un indicador que da cuenta que el espacio que rodea al cuerpo es enteramente vacio. En tratamientos posteriores, veremos que la capacidad también depende del medio circundante.

La unidad de capacidad es el "Faradio", que se representa por $F$. Su relación con las unidades introducidas hasta ahora es

$$[C] \; = \; F \; = \; \frac{C}{V} \; = \; \frac{C^2}{J} \tag{4}$$

Aunque en la actualidad existen dispositivos cuya capacidad es del orden del Faradio, la unidad es demasiado grande. En tal sentido, se usan más frecuentemente los submúltiplos "microfaradio ($\mu F$)" y "nanofaradio" ($nF$).

# 2 Capacidad en sentido relativo.

Consideremos dos cuerpos conductores que mantienen fijas sus posiciones relativas. Supongamos que ambos son originalmente neutros, y que elegimos la referencia de potencial en uno de ellos (cuerpo 1). Ahora imaginemos una transferencia de carga del cuerpo 1 al 2, de modo que al final del proceso, las cargas respectivas serán $-Q$ y $Q$. En estas condiciones, podemos calcular el potencial del cuerpo 2, que de acuerdo con la referencia elegida, coincide con la diferencia de potencial entre ambos cuerpos. En estas condiciones, definimos la capacidad relativa del sistema como el cociente entre la carga adquirida por el cuerpo 2 y su potencial respecto del cuerpo 1.

$$C \; = \; \frac{Q}{V} \tag{5}$$

Esta definición es formalmente análoga a la propuesta en la sección anterior, aunque la incorporación de un "cuerpo" de referencia la hace operativamente más adecuada (como veremos en las aplicaciones). Nuevamente, la capacidad es una propiedad intrínseca del sistema, que depende de la geometría. Esto es, de la forma de cada cuerpo y de la posición y orientación relativas entre ambos. Además, la capacidad podrá depender de las propiedades del medio en el que se encuentran inmersos los cuerpos conductores. Como hasta este punto, nuestro análisis ha sido aplicado sólo a cuerpos en el vacio, las expresiones de capacidad sólo contendrán la constante $\epsilon_0$.

# 3 Capacitores.

Cuando el sistema de dos cuerpos conductores de la sección anterior, se diseña con fines tecnológicos, toma el nombre de capacitor o condensador. El desafio tecnológico consiste en producir capacitores pequeños de gran capacidad. Analizaremos ahora algunas claves de estos diseños, a partir del estudio del más simple de los montajes. Esto es, el capacitor de placas plano-paralelas.

Consideremos dos placas metálicas de área $A$, emplazadas paralelamente de modo que la distancia entre ellas es $d$. Diremos que el capacitor está cargado con carga $Q$, cuando en sus placas residen respectivamente cargas $-Q$ y $Q$. Diremos además que la diferencia de potencial (o simplemente el potencial) del capacitor, será la magnitud medida sobre la placa de carga $Q$ respecto de la otra placa.

No resulta a priori sencillo entender la forma que adopta la distribución de cargas en este tipo de capacitores, por lo que nos limitaremos a describirlo sin una fundamentación sólida[2]. En general se considera una buena aproximación, suponer que las cargas se distribuyen uniformemente en las caras enfrentadas de ambas placas. Entonces, a menos de pequeños efectos de borde, cabe modelar el capacitor como "una muestra finita" del sistema formado por dos planos infinitos uniformemente cargados con densidades $-\sigma$ y $\sigma$. Recordando el campo electrostático producido por un plano infinito uniformemente cargado, tendremos las contribuciones que se detallan en la figura 3 El lector observará que las contribuciones de ambas placas

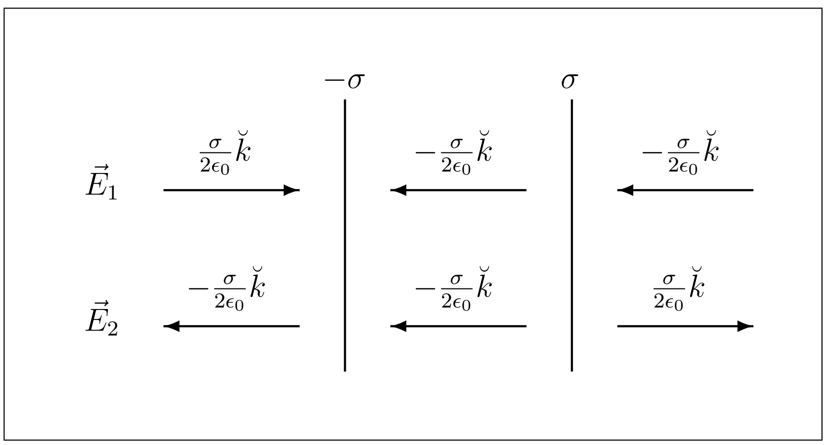


Figure 1: En el esquema se indican dos placas infinitamente extendidas, con densidades de carga $-\sigma$ y $\sigma$ uniformes. Además se indican los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ producidos por cada placa en las distintas regiones.

se cancelan en las partes exteriores, mientras que se refuerzan en la parte interna. Así tenemos que el campo interno es

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{k} \tag{6}$$

El capacitor modelado de esta manera toma el aspecto que se muestra en la figura 3, donde cada placa tiene área $A$ y la distancia entre ellas es $d$. Con la técnica de

[2] Una explicación adecuada de este fenómeno requiere técnicas abordables en un curso de electromagnetismo más avanzado.

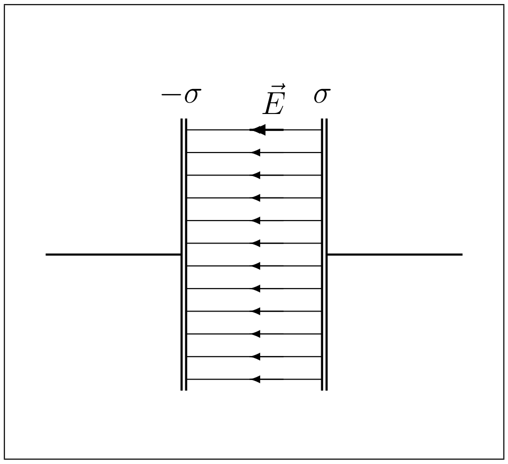


Figure 2: Esquema de un capacitor de placas plano-paralelas, indicando las densidades de carga en cada placa, y el campo electrostático correspondiente.

resolución habitual, el potencial en la placa 2, con respecto a la placa 1 será

$$V = -\int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_0^d \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{k}\right) \cdot dz\breve{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_0^d dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \tag{7}$$

Reemplazando la densidad de carga $\sigma$ (que en nuestro modelo es uniforme), tenemos

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \tag{8}$$

Con lo que la capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{9}$$

Esta expresión muestra que la capacidad es tanto mayor, cuanto mayor sea el área de las placas y menor la distancia entre ellas. Esta es la clave de diseño de los capacitores, que aunque raramente son planos, respetan una regla similar: dos armaduras metálicas de gran área y muy próximas, son las claves para obtener capacidades significativas.

# 4 Ejemplo: Capacitor esférico.

Consideremos el montaje formado por dos piezas metálicas esféricas. La pieza 1 es una esfera maciza de radio $R_1$, y la pieza 2 es un casquete esférico de radio interior $R_2$. Ambas piezas se montan en forma concéntrica. Supongamos ahora que la pieza 1 posee una carga $-Q$, mientras que la 2 tiene carga $Q$. Argumentos de simetría y la nulidad del campo electrostático en volúmenes conductores, llevan a que la carga se distribuya uniformemente sobre las superficies de radios $R_1$ y $R_2$. De los mismos argumentos se desprende que sólo habrá campo electrostático en el espacio comprendido entre ambas superficies. Dicho campo tendrá la forma

$$\vec{E} \;=\; -\frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \tag{10}$$

Ahora calculamos el potencial de la pieza 2 respecto de la 1.

$$V \;=\; -\int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{kQ}{r'^2}\,\breve{r}\right)\cdot dr'\breve{r} \;=\; kQ\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr'}{r'^2} \tag{11}$$

$$V \;=\; kQ\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{12}$$

Para obtener la capacidad buscamos una forma más compacta para $V$

$$V \;=\; \frac{kQ\,(R_2-R_1)}{R_1R_2} \;=\; \frac{Q\,(R_2-R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1R_2} \tag{13}$$

Entonces

$$C \;=\; \frac{Q}{V} \;=\; \frac{4\pi\epsilon_0 R_1R_2}{R_2-R_1} \tag{14}$$

Esta expresión es muy apropiada para analizar la influencia de la "forma" del capacitor, respecto de la regla de diseño propuesta en la sección 3. Para este caso, si la distancia $d$ entre superficies es muy pequeña, tendremos que

$$d = R_2 - R_1 \qquad R_1 = R_2 = R \tag{15}$$

Con lo que la capacidad toma la forma

$$C \;=\; \frac{\epsilon_0\;4\pi R^2}{d} \;=\; \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{16}$$

Esta expresión es idéntica a la obtenida para capacitores plano-paralelos, por lo que cabe concluir que, al menos entre las formas analizadas, la capacidad se hace poco sensible a la forma del dispositivo, cuando la distancia entre conductores es muy pequeña.

# 5 Una analogía esclarecedora.

Antes de abordar el análisis de la carga de un capacitor, conviene examinar una analogía hidráulica. Imaginemos dos recipientes con sus bases unidas por un tubo.

El nivel de líquido será el mismo en ambos recipientes. Supongamos que el tubo de conexión posee una exclusa y una bomba (ver figura 5.a). Supongamos ahora que inicialmente la exclusa está abierta, y se pone en marcha la bomba. Entonces el líquido sube en el recipiente de la izquierda y baja en el de la derecha. Este proceso continúa hasta alcanzar el límite de la capacidad de la bomba. Si ahora se cierra la exclusa, los niveles de líquido quedarán como en la figura 5.b.

Analicemos algunos aspectos de lo ocurrido. En primer lugar, nótese que la bomba hizo trabajo sobre el fluido, que se manifiesta presentando un "desnivel". Este desnivel puede considerarse como, una "reserva de energía", aportada por la bomba, que puede "guardarse" en el dispositivo formado por los dos recipientes. El montaje puede ser transportado sin perjuicio de la energía que almacena y la misma puede ser utilizada cuando sea necesario. ¿Cómo se la puede utilizar? Simplemente colocando en el lugar de la bomba, una máquina hidráulica cualquiera que se accione por circulación del fluido a través de ella. Observemos además que el fluido devolverá la energía almacenada con la asistencia de un campo conservativo: el campo gravitatorio.

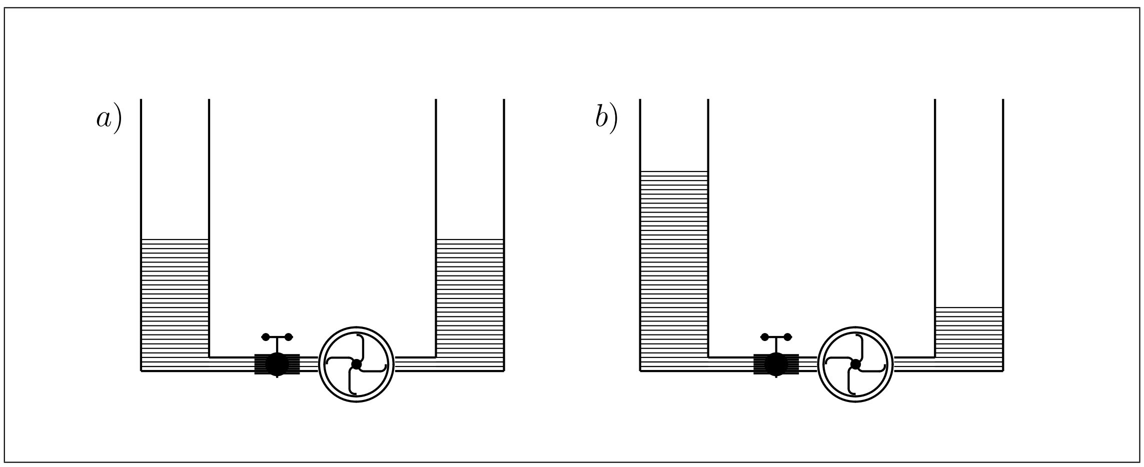


Figure 3: Analogía hidráulica del funcionamiento de un capacitor. Se trata de un tubo en forma de U, que posee una bomba y una exclusa en la conexión de sus brazos. La figura *a* representa el agua en estado de equilibrio. La figura *b* muestra lo que ocurre después que opera la bomba y se cierra la exclusa.

En varios aspectos, los capacitores funcionan en forma análoga al sistema hidráulico presentado. En la sección siguiente desarrollaremos la analogía.

# 6 Carga de capacitores.

En primer lugar, corresponde que interpretemos el capacitor como el montaje formado por los dos recipientes. Por su parte, el campo electrostático residente en el capacitor cargado, juega un papel análogo al del campo gravitatorio. El objeto eléctrico equivalente a la bomba es una pila. Aunque más adelante trataremos en detalle el funcionamiento de la pila, en este punto la introducimos simplemente como un objeto que puede aportar energía y garantizar una diferencia de potencial (de la misma manera que la bomba puede producir una diferencia de alturas en los niveles de fluido en cada recipiente). Por último, la exclusa puede homologarse con un

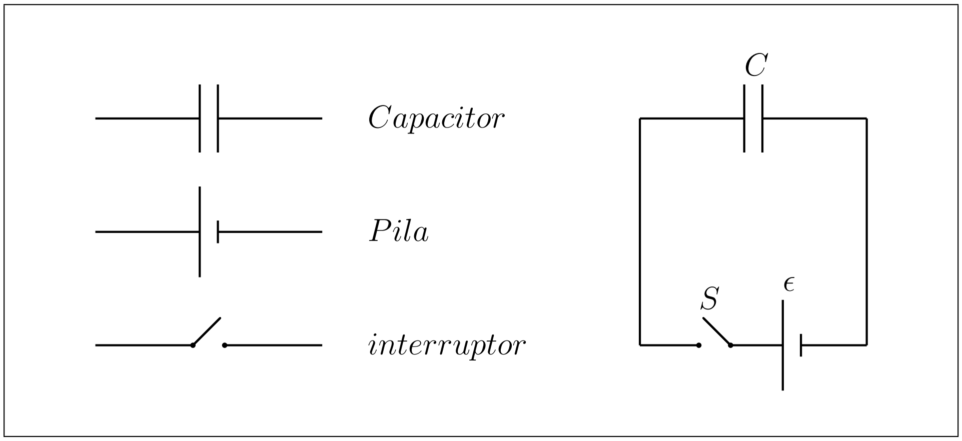


Figure 4: Simbología para la representación de circuitos con capacitores. El circuito de la derecha es uno de los más elementales posibles.

interruptor. Los símbolos usuales se muestran en la figura 6, y luego se los combina para representar un sistema análogo al montaje hidráulico. Este tipo de diagrama representa un “circuito”, donde las líneas que unen los elementos son conductores (por ejemplo, cables). En nuestro modelo didáctico lo análogo a los cables son los tubos por los que circula el fluido.

¿Que podemos decir entonces de un capacitor cargado de esta manera?
a) Que alcanzará una diferencia de potencial equivalente a la que garantiza la pila.
b) Que acumulará energía cedida en forma de trabajo por la pila.
c) Que dicha energía podrá guardarse en el capacitor, aún cuando se haya desconectado la pila.
d) Que la energía podrá ser devuelta por acción del campo electrostático residente en el interior del capacitor.

# 7 Conexión entre capacitores.

Consideremos dos capacitores cuyas capacidades son $C_1$ y $C_2$. Suponga que se los conecta respectivamente a pilas que garantizan diferencias de potencial $V_1$ y $V_2$. Entonces, las cargas serán.

$$Q_1 \;=\; C_1 V_1 \quad y \quad Q_2 \;=\; C_2 V_2 \tag{17}$$

Supongamos ahora que los capacitores se conectan como indica la figura 7.a. Aquí resulta muy importante observar la polaridad de los capacitores. Esto es, cuál de sus placas es positiva y cuál es negativa. Observemos el caso planteado en la figura 7. Las placas de la izquierda están conectadas por un conductor, por lo que ambas deben tener el mismo potencial, al que podemos elegir como "cero". Recordemos que la

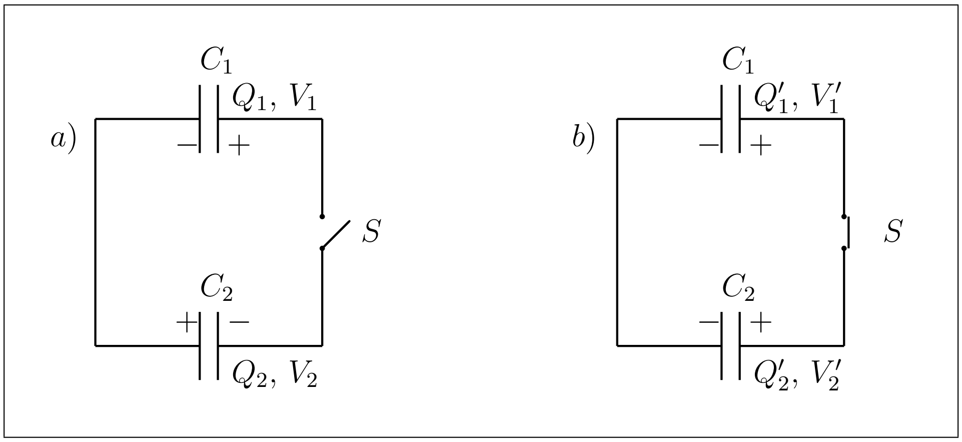


Figure 5: Conexión elemental entre dos capacitores. a) Antes de cerrar el circuito cada capacitor tiene cargas arbitrarias $Q_1$ y $Q_2$, y los correspondientes potenciales (distintos) $V_1$ y $V_2$. b) Al cerrar el circuito el sistema evoluciona hasta alcanzar el nuevo equilibrio electrostático, con cargas respectivas $Q_1'$ y $Q_2'$ y la misma diferencia de potencial $V'$ en ambos capacitores.

carga de un capacitor y su potencial se miden sobre una de las armaduras, respecto de la otra. Respetando una única referencia y observando los signos indicados en la figura 7, tenemos que $Q_1$ y $V_1$ son magnitudes positivas, mientras que $Q_2$ y $V_2$ son negativas (observadas sobre las placas de la derecha).

Ahora supongamos que se cierra el interruptor $S$, de modo que luego de un breve lapso, el conjunto recupera el equilibrio electrostático. En las condiciones finales (figura 7.b), también el potencial del lado derecho debe ser el mismo en ambas placas. Entonces, si indicamos las magnitudes del estado final con letras primadas, tendremos

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1' \;=\; \frac{Q_1'}{C_1} \\ \\ V_2' \;=\; \frac{Q_2'}{C_2} \end{array} \right. \qquad V_1' \;=\; V_2' \quad \rightarrow \quad \frac{Q_1'}{C_1} \;=\; \frac{Q_2'}{C_2} \tag{18}$$

Por otra parte, la conservación de la carga implica que

$$Q_1' \ + \ Q_2' \ = \ Q_1 \ + \ Q_2 \tag{19}$$

Las relaciones (18) y (19) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es inmediata

$$\begin{aligned} Q_1' \ &= \ C_1 \ \tfrac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} \\ Q_2' \ &= \ C_2 \ \tfrac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} \end{aligned} \tag{20}$$

Reemplazando en cualquiera de las primeras ecuaciones (18), obtenemos el potencial del estado final

$$V_1' \ = \ V_2' \ = \ \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \tag{21}$$

Aquí debemos enfatizar que $Q_1$ y $Q_2$ tienen signos determinados por la "polaridad" que les corresponde a cada capacitor en la conexión inicial. Entonces la suma $Q_1+Q_2$ tendrá un signo que debe respetarse. La figura 7.b corresponde al caso en que la suma es positiva. Entonces queda la polaridad indicada, y el potencial es mayor en las armaduras derechas que en las izquierdas. Pero habrá casos en que ocurre lo contrario, o más aún, que tanto las cargas finales y el potencial final resulten nulos. Dejamos a cargo del lector que analice las circunstancias en que pueda ocurrir esto.

# 8 Capacitores en serie y en paralelo.

En algunas situaciones, dispositivos que forman parte de un circuito se conectan en formas que reciben nombres particulares. Nosotros veremos dos casos muy frecuentes de conexión que se conocen como serie y paralelo. A continuación describimos cada caso.

a) Conexión en serie: cuando dos capacitores inicialmente descargados, se conectan uno a continuación del otro, formando parte de un circuito más grande, se dice que están conectados en serie. (ver figura 8.a). Note que una placa del capacitor 1 está conectada con una placa del capacitor 2, y el conductor que las une no tiene bifurcaciones. Como inicialmente ambos capacitores están descargados, la carga total residente en las placas vinculadas y el cable que las une, debe ser nula. Entonces si una placa adquiere carga $Q$, la otra debe tener $-Q$. En otras palabras, los dos capacitores adquieren la misma carga. Por otra parte, la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$ será la suma de las diferencias de potencial de cada capacitor. Esto es

$$Q_1 \ = \ Q_2 \ = Q \quad \ y \quad V_B - V_A \ = V_1 + V_2 \tag{22}$$

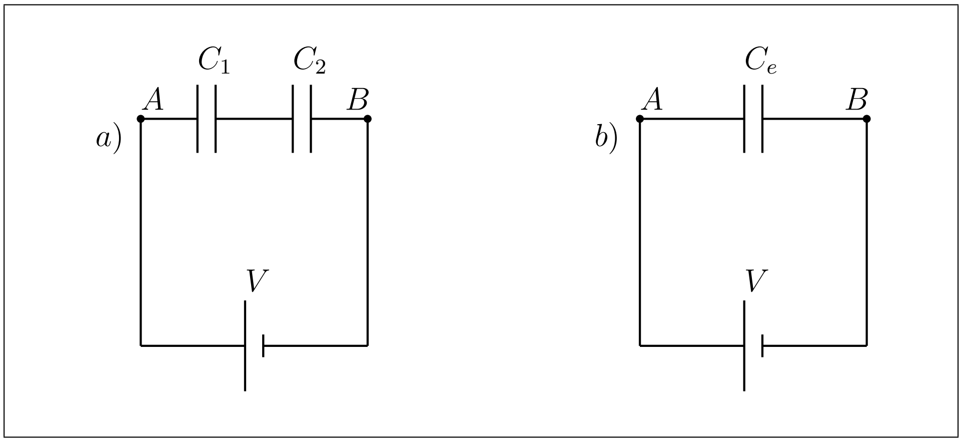


Figure 6: a) Esquema de un circuito que contiene dos capacitores en serie. b) Esquema del circuito equivalente, donde la serie ha sido reemplazada por un único capacitor.

Combinando estas expresines tenemos

$$V_B - V_A \;=\; \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \;=\; Q\,\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \tag{23}$$

Ahora podríamos preguntarnos ¿Será posible reemplazar los capacitores en serie, por un único capacitor equivalente? Si, podríamos. El circuito equivalente es el de la figura 8.b y la capacidad equivalente debe satisfacer

$$\frac{1}{C_e} \;=\; \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad o\ bien \qquad C_e \;=\; \frac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2} \tag{24}$$

Con lo que concluimos que

$$V_B - V_A \;=\; \frac{Q}{C_e} \tag{25}$$

Aquí observamos que el capacitor equivalente adquiere la misma carga $Q$ cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$.

b) Conexión en paralelo: en la figura 8 presentamos dos capacitores conectados en paralelo. El aspecto más relevante de esta conexión radica en que las placas de la izquierda están conectadas entre si, por lo que ambas tienen el mismo potencial. Ocurre lo mismo con las placas de la derecha, por lo que cabe concluir que ambos capacitores presentan la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$. Entonces

$$V_B - V_A \;=\; V_1 \;=\; V_2 \tag{26}$$

Nuevamente buscamos un capacitor equivalente, es decir que adquiera la misma carga total del conjunto cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial. En

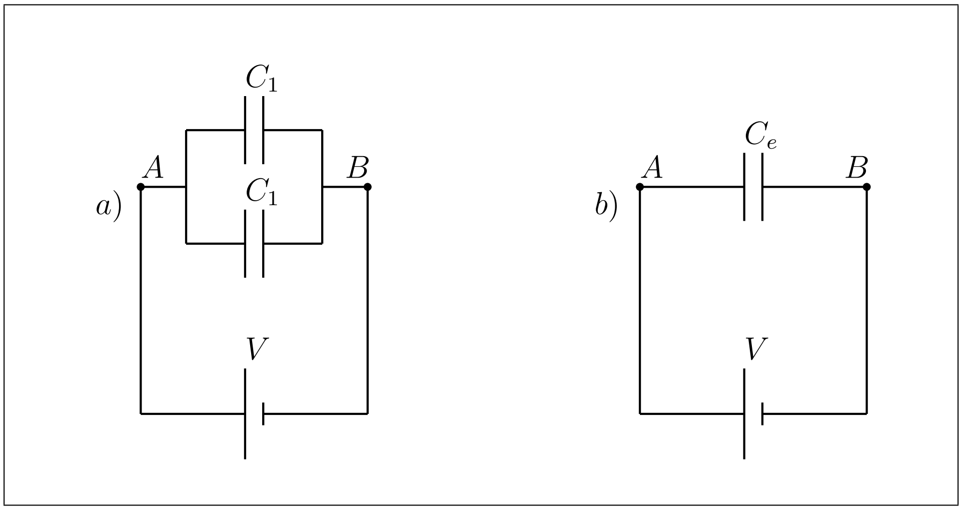


Figure 7: a) Esquema de un circuito que contiene dos capacitores conectados en paralelo. b) Esquema del circuito equivalente, donde se ha reemplazado el paralelo por un único capacitor equivalente.

este caso, la carga total es la suma de las dos cargas. Entonces tenemos

$$Q_1 + Q_2 \;=\; C_1 V_1 + C_2 V_2 \;=\; (V_B - V_A)\,(C_1 + C_2) \tag{27}$$

Definiendo la capacidad como

$$C_e \;=\; C_1 + C_2 \tag{28}$$

Reconocemos que

$$Q_1 + Q_2 \;=\; (V_B - V_A)\; C_e \tag{29}$$

# 9 Energía almacenada en un capacitor.

Para evaluar la energía residente en un capacitor cargado, podemos calcular el trabajo cuasiestático que debe realizar un agente externo para cargarlo. Resolvamos el caso de un capacitor de capacidad $C$, que adquiere una carga $Q$. Comencemos por suponer que el proceso de carga ha ocurrido parcialmente, de modo que las placas poseen cargas $-q$ y $q$ respectivamente (con $0 < q < Q$). El potencial de la placa positiva respecto de la negativa en estas condiciones será

$$V(q) \;=\; \frac{q}{C} \tag{30}$$

donde se agregó la dependencia funcional $V(q)$, para poner de manifiesto que el proceso de carga no ha terminado. Supongamos ahora que transportamos una nueva porción de carga $dq$ desde la placa negativa a la positiva. El trabajo necesario para ello coincide con el aumento de energía potencial electrostática $dU$. Esto es

$$dW_{F_{EXT}} \;=\; dU \;=\; V(q)\,dq \;=\; \frac{q\,dq}{C} \tag{31}$$

El trabajo total realizado en el proceso, que coincide con la energía potencial electrostática adquirida se obtiene por integración de (31). Esto es

$$W_{F_{EXT}} \;=\; U \;=\; \int_0^Q \frac{q\,dq}{C} \;=\; \frac{Q^2}{2C} \tag{32}$$

Este resultado es de carácter general, ya que no se utilizaron detalles geométricos particulares de un montaje específico. Si llamamos simplemente $V$ a la diferencia de potencial $V(Q)$ obtenida al final del proceso de carga, tenemos varias expresiones

$$U \;=\; \frac{Q^2}{2C} \;=\; \frac{1}{2}\,QV \;=\; \frac{1}{2}\,CV^2 \tag{33}$$