ASTROFÍSICA DE LA EMISIÓN EN EL CONTINUO DE RADIO

APUNTE: Convolución - TF y Filtros

- La **convolución**[1] es el operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función, la cual representa el resultado obtenido de la superposición de la función f y la función g después de haber sido esta última, invertida y trasladada (ver Fig 1). La convolución de f y g se denota $f * g$. Se define como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas una distancia t.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, g(t-\eta)\, d\eta \tag{1}$$

El intervalo de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones.

Para las funciones discretas se puede usar una forma discreta de la convolución. Esto es:

$$(f * g)(m) = \sum_{n} f(n)\, g(m-n) \tag{2}$$

Propiedades

1 - Conmutatividad

$$f * g = g * f \tag{3}$$

2 - Distributividad

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \tag{4}$$

3 - Asociatividad

$$f * (g * h) = (f * g) * h \tag{5}$$

4 - Asociatividad con multiplicación escalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag) \tag{6}$$

5 - Regla de derivación

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg \tag{7}$$

$$Df(n) = f(n+1) - f(n) \tag{8}$$

donde Df indica la derivada de f o en el caso discreto, el operador diferencia.

- (i) Teorema de convolución
$$F(f * g) = (F(f)) \cdot (F(g)) \tag{9}$$
donde F indica la Transformada de Fourier de una función. También es válido para la Transformada de Laplace.

- (ii) Convoluciones con *deltas de Dirac*
$$f(t) * \delta(t) = f(t) \tag{10}$$
$$f(t) * \delta(t - t_o) = f(t - t_o) \tag{11}$$
$$f(t - t_1) * \delta(t - t_o) = f(t - t_o - t_1) \tag{12}$$

Ejemplo en Radioastronomía[(2)]

Se quiere conocer la densidad de flujo S_ν recibida de una fuente con una distribución de brillo $B(\theta, \phi)$ observada con una antena cuyo diagrama es $P_n(\theta, \phi)$. Para ello:

$$S_o = \int\int B(\theta, \phi)\, P_n(\theta - \theta_o, \phi - \phi_o)\, d\Omega \tag{13}$$

Supongamos que el eje de referencia del haz de la antena coincide con el eje ($\theta = \pi/2, \phi = 0$) de la Fig. 1. La densidad de flujo observada en este caso va a ser

$$S(\phi_o) = \int B(\phi)\, P_n(\phi - \phi_o)\, d\phi \tag{14}$$

donde ϕ_o es el ángulo que se desplaza el diagrama de la antena, $S(\phi_o)$ es la densidad de flujo observada en watts m^{-2} Hz^{-1}, $B(\phi)$ la distribución de brillo del cielo en watts m^{-2} Hz^{-1} rad^{-1} y $P_n(\phi - \phi_o)$ el diagrama de antena normalizado con respecto al ángulo ϕ.

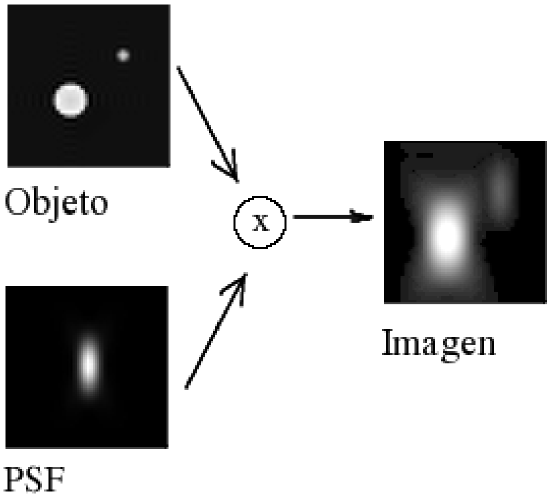
La densidad de flujo observada puede ser expresada como,

$$S(\phi_o) = \int B(\phi)\, P_n^*(\phi_o - \phi)\, d\phi \tag{15}$$

donde $P_n^*(\phi_o - \phi) = P_n(\phi - \phi_o)$. La ecuación anterior se puede escribir como

$$S(\phi_o) = \int B(\phi - \phi_o)\, P_n^*(\phi)\, d\phi \tag{16}$$

$S(\phi_o)$ es el resultado de convolucionar B y P_n^*. Entonces la ecuación (16) puede escribirse en forma abreviada como $S(\phi_o) = B * P_n^*$. De esta ecuación se ve que, en general, cuando se observa con un instrumento el resultado no es una imagen verdadera de la fuente sino una imagen modificada. Este efecto se ilustra en la Fig. 2, donde el perfil observado $S(\phi_o) = B * P_n^*$ está suavizado respecto del



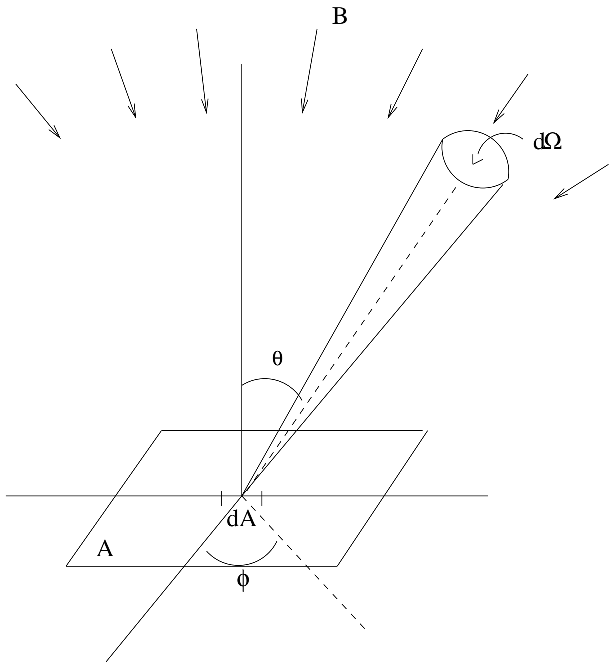


Figura 1: *Izquierda*: Ejemplo de imagen resultante de una convolución. *Derecha*: Radiación de brillo B incidente en una superficie de área A.

perfil verdadero $B(\phi)$, o sea que el efecto de la convolución es suavizar los detalles de la distribución.

Sólo en el caso que la antena posea una resolución angular infinita $P_n(\theta, \phi) = \delta(\theta, \phi)$ la distribución de brillo en el cielo no va a estar alterada por el instrumento (ver Fig. 3). Para simplificar se considera este problema en una dimensión. En este caso se considera al diagrama de antena como una delta definida de la siguiente manera: $\delta(\phi) = 0$ para $\phi \neq 0$ y $\delta(\phi) = \infty$ para $\phi = 0$ y $\int \delta(\phi) d\phi = 1$ En este caso,

$$S(\phi_o) = B(\phi)\, K_1 \int \delta(\phi_o - \phi)\, d\phi \tag{17}$$

y la densidad de flujo observada es igual a la distribución de brillo.

Ahora, para el caso en que la fuente sea una fuente puntual y que el haz de la antena sea finito, la distribución de la fuente va a estar representada por la función delta definida anteriormente (ver Fig. 4 a) y la densidad de flujo observada va a ser igual al diagrama de antena pero con el signo invertido (ver Fig. 4 b).

- La **correlación cruzada**:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, g(\eta - t)\, d\eta \tag{18}$$

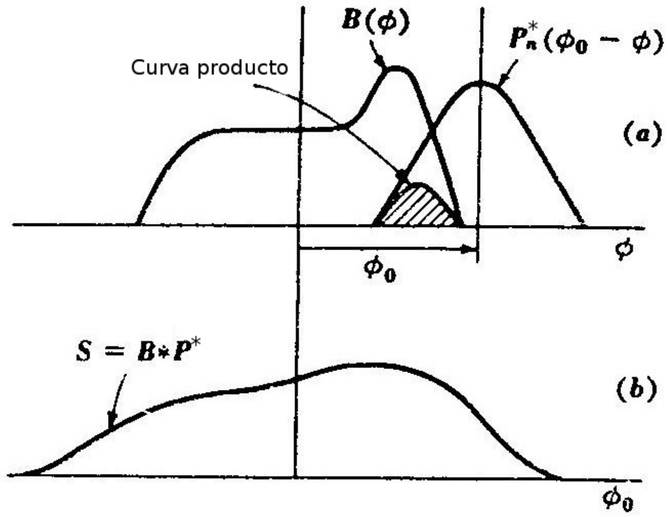


Figura 2: La distribución de brillo verdadera $B(\phi)$ en (a) antes de ser convolucionada con el diagrama de antena P_n^*, en (b) se muestra la distribución de brillo observada S luego de la convolución.

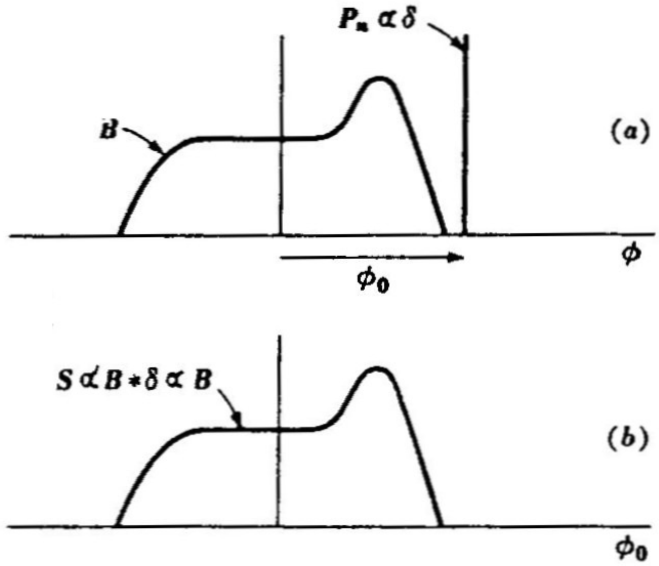


Figura 3: Para una antena perfecta ($P_n(\phi) \equiv \delta(\phi)$) la distribución observada es idéntica a la distribución verdadera.

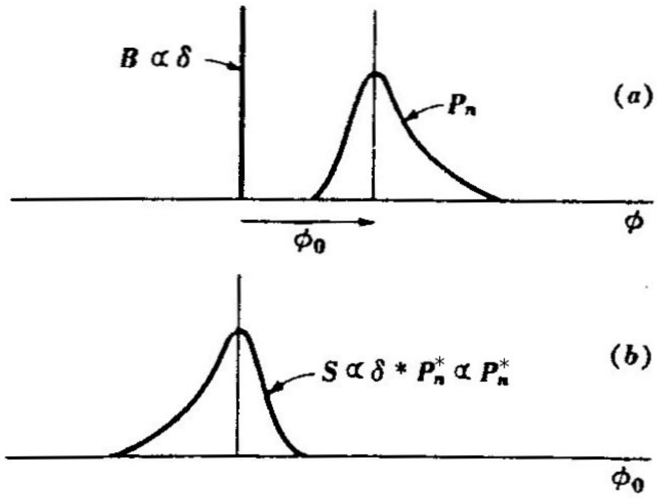


Figura 4: La distribución de brillo observada de una fuente puntual es la misma que el diagrama de antena pero con la forma invertida.

es similar a la convolución aunque la función $g(\eta)$ está desplazada sin revertir. De modo que si $g(\eta)$ es función par, la correlación cruzada = convolución. Esta operación matemática suministra una medida de la similitud entre las funciones f y g en función del desplazamiento t. Si la función resultante de la correlación es "nula"para todo el desplazamiento t, entonces se dice que las dos funciones no están correlacionadas. Cuidado, no vale la propiedad conmutativa.

- Se denomina **autocorrelación** cuando la correlación cruzada se realiza con la misma función:

$$f * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, f(\eta - t)\, d\eta \tag{19}$$

Teorema de autocorrelación:

La transformada de Fourier de la autocorrelación es el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de la función.

$$F(f(t) * f(t)) = |F(f(t))|^2 = |F(s)|^2 \tag{20}$$

Este teorema es muy empleado en comunicaciones.

- La **Transformada de Fourier** es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformaciones de cualquiera de los dominios al otro.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i t w}\, dt \tag{21}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{2\pi i t w}\, dw \tag{22}$$

siendo t: tiempo; w: frecuencia.

Propiedades[3]

1 - Linealidad

$$F\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega) \tag{23}$$

2 - Dualidad

$$F[f(t)] = F(\omega) \rightarrow F[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \tag{24}$$

3 - Cambio de escala

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{25}$$

4 - Transformada de la conjugada

$$F[f^{*}(t)] = F^{*}(-\omega) \tag{26}$$

5 - Traslación en el tiempo

$$F[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \tag{27}$$

6 - Traslación en frecuencia

$$F[e^{+j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0) \tag{28}$$

7 - Derivación en el tiempo

$$F\left[\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right] = (j\omega)^n\, F(\omega) \tag{29}$$

8 - Derivación en frecuencia

$$F\left[(-jt)^n\, f(t)\right] = \frac{\partial^n F(\omega)}{\partial \omega^n} \tag{30}$$

9 - Transformada de la integral

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\partial\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{31}$$

10 - Transformada de la convolución

$$F\left[f(t)*g(t)\right] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\partial\tau\right] = F(\omega)G(\omega) \tag{32}$$

11 - Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\partial t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\partial\omega \tag{33}$$

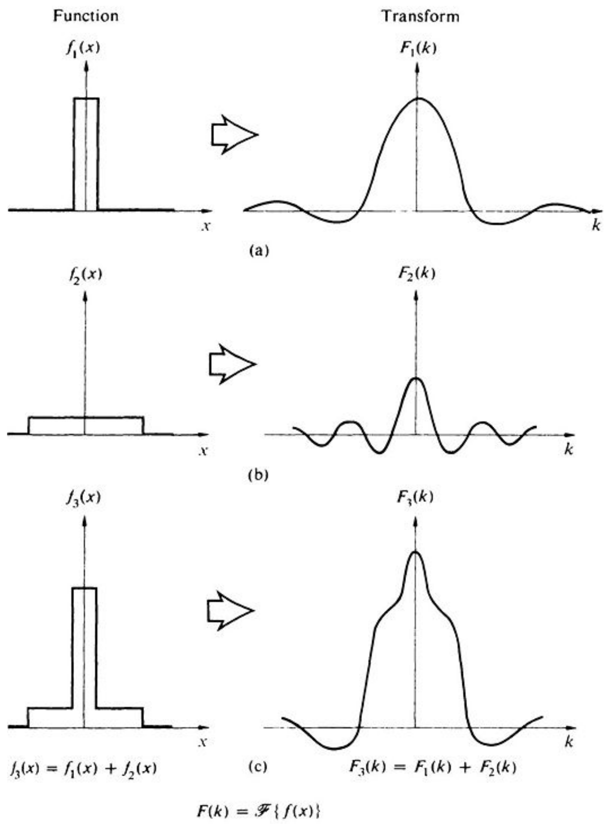


Figura 5: Ejemplo de funciones con sus respectivas Transformadas de Fourier.

- **Muestreo**(4): es la conversión de una señal en tiempo continuo a una señal en tiempo discreto obtenida tomando muestras de la señal en tiempo continuo en instantes de tiempo discreto. Así $x_a(t)$ es la entrada de la señal al muestreador, la salida es $x_a(nT) = x(n)$, donde T se denomina el intervalo de muestreo.

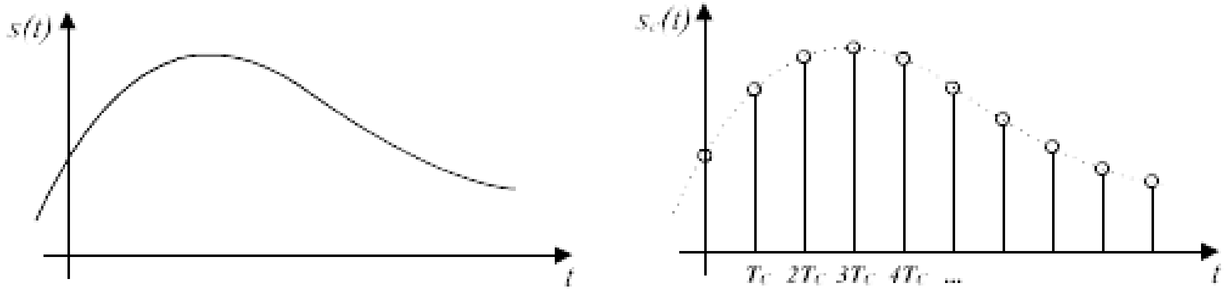


Figura 6: *Izquierda*: Espectro de la señal original. *Derecha*: Espectro de la señal muestreada cada Tc.

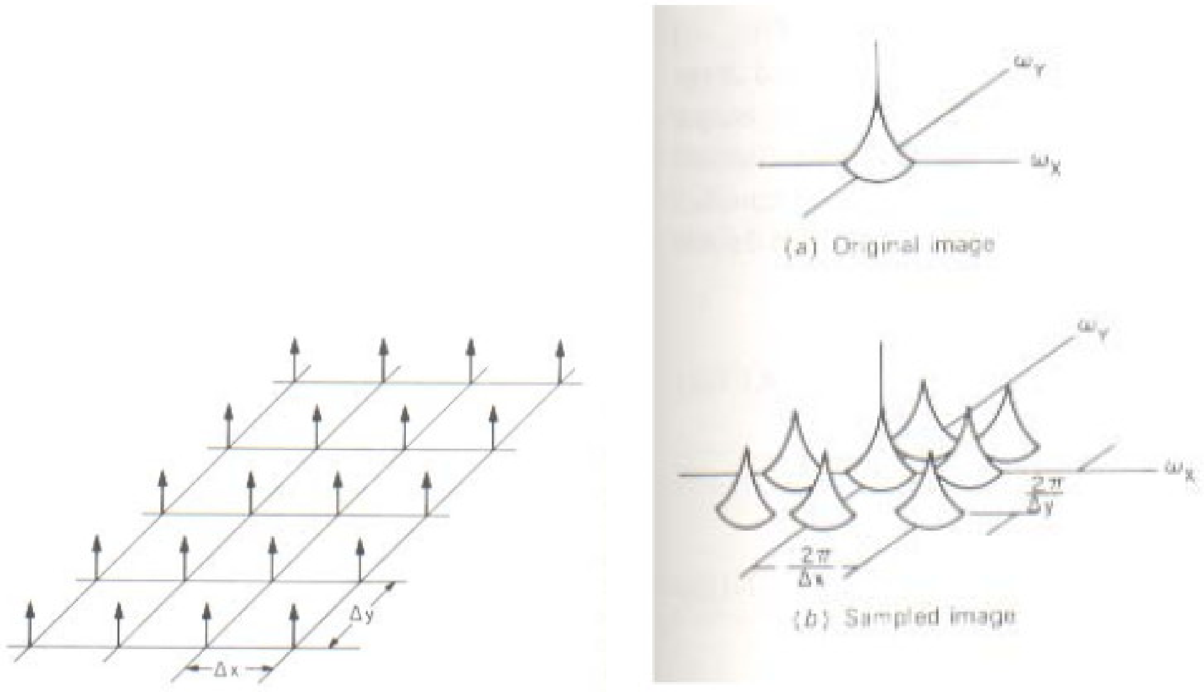


Figura 7: *Izquierda*: Arreglo de muestreo con funciones delta de Dirac. *Derecha*: Imagen muetreada a la frecuencia $\frac{2\pi}{\Delta x}$ y $\frac{2\pi}{\Delta y}$.

Una condición importante que se propone en el Teorema es que "la frecuencia de muestreo (Ws) debe ser mayor o igual al doble de la componente frecuencial más alta". De este modo, si en el espectro original la frecuencia es Wc (llamada también frecuencia de corte) cuando la señal se muestrea con $Ws > 2Wc$, el resultado en la señal obtenida es una **pérdida de tiempo**, si en cambio la señal se muestrea con $Ws < 2Wc$, el resultado obtenido será **pérdida de señal**. De este modo debe muestrearse con $Ws = 2Wc$.

- En algunas aplicaciones se quieren eliminar por completo algunas frecuencias. A este proceso se le llama **Filtrado**. El filtrado de secuencias de datos se usa para suavizar los datos a fin de eliminar fluctuaciones aleatorias (que generalmente son de alta frecuencia).

La base matemática del filtrado es el hecho de que la transformada de Fourier de la salida es la transformada de Fourier de la entrada multiplicada por la respuesta en frecuencia del sistema.

$$F(salida) = F(S)sinc^2(S) = F(f(x) * \Delta(x)) \tag{34}$$

$$F(salida) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(k) \cdot \Delta(x-k) \tag{35}$$

Un filtro ideal selectivo en frecuencia es aquel que deja pasar con exactitud exponenciales complejas de un conjunto de frecuencias y elimina el resto.

El filtro pasa bajos puede considerarse una operación de suavizado. Para secuencias de datos obtenidos en determinados momentos, una operación común de suavizado es la que se conoce como ”promedio móvil”, donde el valor suavizado $f(n)$ para cualquier valor de n es un promedio de valores en la vecindad de n_o. La idea básica es que promediando valores locales, las variaciones rápidas serán promediadas y las variaciones lentas serán mantenidas. El ”promedio móvil”puede expresarse como la convolución con una función rectángulo o triángulo.

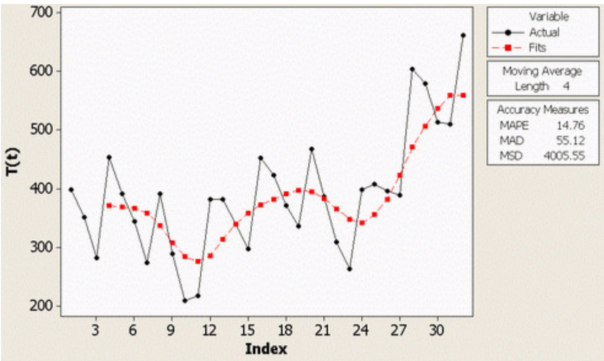


Figura 8: Diagrama de la salida resultante después de aplicar un filtro a los datos de entrada.

Hanning

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0.0 & \text{si } x = \pm 2 \\ 0.25 & \text{si } x = \pm 1 \\ 0.5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$F_1 = f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 0{,}25 + f_2 \cdot 0{,}5 + f_3 \cdot 0{,}25 + f_4 \cdot 0$
$F_2 = f_1 \cdot 0 + f_2 \cdot 0{,}25 + f_3 \cdot 0{,}5 + f_4 \cdot 0{,}25 + f_5 \cdot 0$
$F_3 = f_2 \cdot 0 + f_3 \cdot 0{,}25 + f_4 \cdot 0{,}5 + f_5 \cdot 0{,}25 + f_6 \cdot 0$
.
.

$F_i = f_{i-1} \cdot 0 + f_i \cdot 0{,}25 + f_{i+1} \cdot 0{,}5 + f_{i+2} \cdot 0{,}25 + f_{i+3} \cdot 0$

Con este filtro se obtienen $(n-2)$ puntos de salida.

$$\sigma_y^2 = (0{,}25)^2 \cdot \sigma_{y_{i-1}}^2 + (0{,}5)^2 \cdot \sigma_{y_i}^2 + (0{,}25)^2 \cdot \sigma_{y_{i+1}}^2 \tag{36}$$

Considero $\sigma_{y_{i-1}} = \sigma_{y_i} = \sigma_{y_{i+1}}$ entonces

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y_i}^2 \cdot [(0{,}25)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}25)^2] \tag{37}$$

$$\sigma_y = 0{,}61 \cdot \sigma_{y_i} \tag{38}$$

Es decir que el error obtenido después de filtrar la señal con Hanning es un 60 % del error de la señal sin filtrar.

- **Referencias**:

(1) *Convolución*, www.es.wikipedia.org
(2) *Tesis de Doctorado*. Dra. Laura Suad, UNLP, 2013.
(3) *Transformada de Fourier*, www.es.wikiversity.org
(4) *Teorema del Muestreo*, Dr. Luis Morales Mendoza, www.ingenierias.ugto.mx