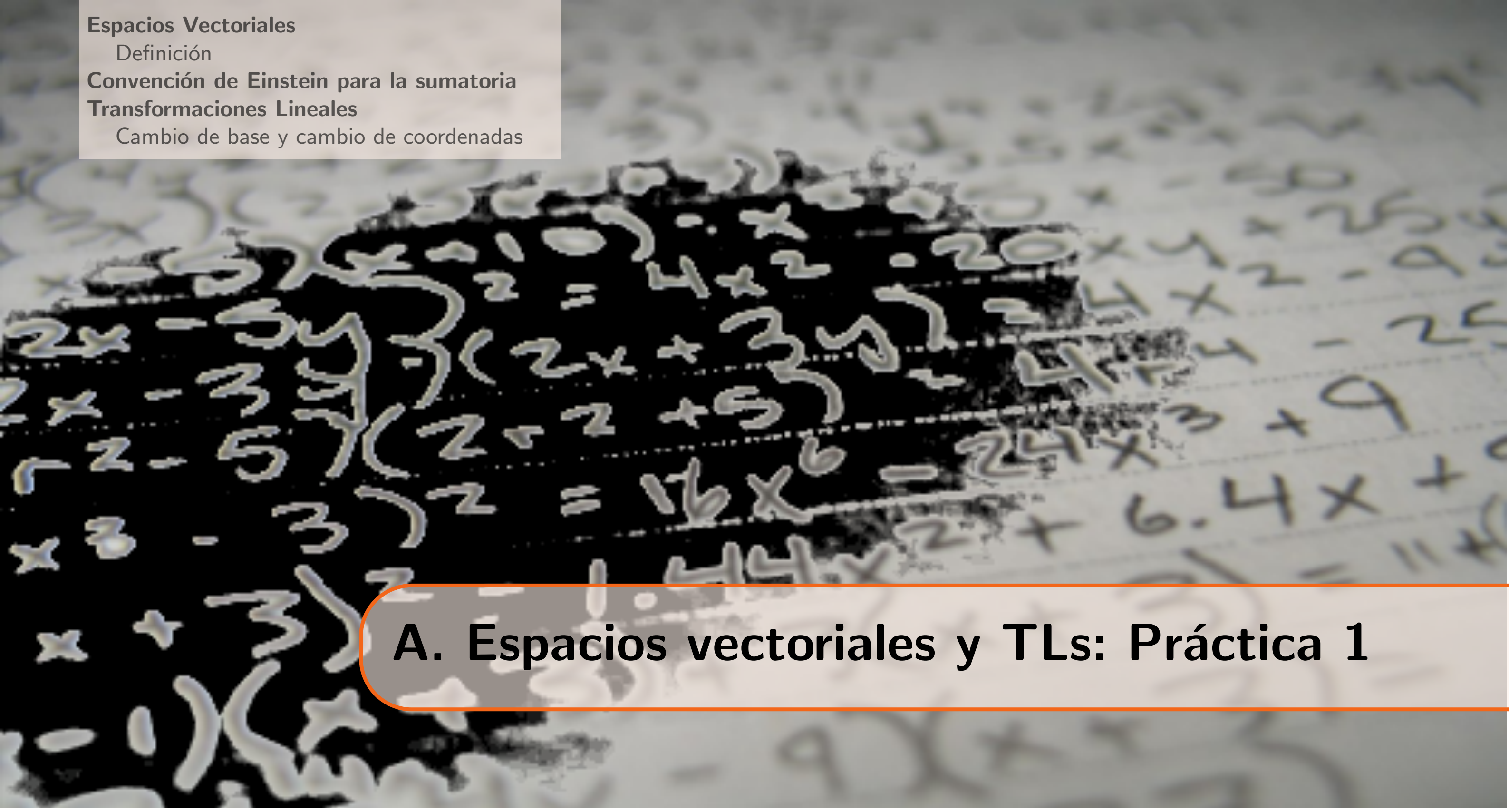

A. Espacios vectoriales y TLs: Práctica 1

Comprende los Capítulos 2 y 3 de los apuntes correspondientes al módulo de Álgebra Lineal.

A.1 Espacios Vectoriales

A.1.1 Definición

Problema A.1 — El árbol genealógico de los espacios vectoriales. Los espacios vectoriales son estructuras algebráicas complejas formadas por un conjunto de elementos con dos operaciones binarias que satisfacen 8 axiomas sobre otra estructura algebráica más simple denominada cuerpo.

Ejercicio A.1 Averigue los requerimientos para tener un cuerpo (conjuntos, operaciones, axiomas) para entender completamente las condiciones sobre las cuales se construye un espacio vectorial como estructura algebráica compleja. ■

Notará que la adición y el producto entre escalares (como elementos de un cuerpo) comparten ciertos axiomas necesarios para constituir el cuerpo. Al conjunto con **una** operación binaria que satisface esos axiomas comunes se lo denomina grupo abeliano o conmutativo.

Ejercicio A.2 Si al grupo abeliano le quita la propiedad de la conmutatividad, ¿qué estructura más básica obtiene? Y si a esta última le quita el elemento inverso, ¿qué estructura obtiene? ¿Y si a esta le quita la identidad? Y si finalmente a esta última estructura le quita la asociatividad, ¿qué estructura algebráica básica tiene? ■

Ejercicio A.3 **Opcional:** Sea $V=\{(x,y)|x,y\in\mathscr{R}\}$. Se define:

1. la adición entre vectores como: $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$ y la multiplicación entre vectores y escalares como: $c\odot(x,y)=(cx,y)$,
2. la adición entre vectores como: $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',0)$ y la multiplicación entre vectores y escalares como: $c\odot(x,y)=(cx,0)$,

¿Es V un espacio vectorial con estas operaciones sobre el cuerpo K de los reales? ■

Ejercicio A.4 Opcional: Sea $V = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{C}\}$. Se define la adición entre vectores como: $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x'+1, y+y'+1)$, y la multiplicación entre vectores y escalares como: $c \odot (x,y) = (cx+c-1, cy+c-1)$, entonces:

1. ¿es V un espacio vectorial con estas operaciones sobre el cuerpo K de los complejos?
2. ¿es el conjunto $\{(1,0),(6,3)\}$ una base de V?

■

A.2 Convención de Einstein para la sumatoria

Problema A.2 — El tiempo es oro. Para entender lo valioso (por lo práctico) de la convención de Einstein vamos a practicar cómo reescribir algunas expresiones que se han visto en Análisis[1]. Haga uso del símbolo de Levi–Civita (si no sabe lo que es, averíguelo).

Ejercicio A.5 Escriba las siguientes expresiones usando a) expansión por componentes, y b) convención de Einstein para la sumatoria:

1. $[\vec{v} \times \vec{w}]_i$,
2. $\vec{v} \times \vec{w}$,

donde la primera indica la componente i del vector[a] que resulta de hacer el producto vectorial entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (considere dimensión 3). ■

[a] Note que se está hablando de componente y no de coordenada. La primera es uno de los elementos de los que se *compone* el vector, la segunda es el coeficiente que resulta de su proyección en una base. Si la base es la canónica, las coordenadas coinciden numéricamente con los valores de las componentes.

Como no se *convenció* de lo *conveniente* que puede ser la *convención* sobre las sumatorias:

Ejercicio A.6 Repita el ejercicio anterior pero para la expresión más compleja $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u})$. ■

Ahora, sólo usando la convención de Einstein para la sumatoria:

Ejercicio A.7 Escriba la divergencia del rotor del campo F y calcule su valor. ■

Ejercicio A.8 Opcional: Demuestre usando a) expansión por componentes, y b) convención de Einstein para la sumatoria, la siguiente identidad: $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$. ■

Ejercicio A.9 Opcional: Expanda la expresión $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4)$ usando la convención

[1] Si bien es aún más interesante ver el potencial simplificativo de la notación de Einstein en Relatividad General, para resolver este tipo de ejercicios se deben tener ciertos conceptos que a esta altura no se han introducido y otros que están fuera del alcance de la materia, por lo que el presente comentario es más bien anecdótico, i.e. simplemente para que lo tenga en cuenta.

de Einstein para la sumatoria y pruebe que es igual a: $(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3)(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_4)-(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_4)(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3)$.
■

De aquí en más, todo lo que se pueda, lo escribirá en notación de Einstein.

A.3 Transformaciones Lineales

A.3.1 Cambio de base y cambio de coordenadas

Problema A.3 — Directo a los bifes. Vamos directamente a aplicar varios conceptos en un mismo problema y estudiar los cambios de base y de coordenadas entre sistemas de uso común en Física.

Ejercicio A.10 De una matriz $\mathbf{A}$ se sabe que es 4×4 y que para $\vec{v}^T=(1,1,1,1)^T$, los valores de $\mathbf{A}^n\vec{v}^T$, para $n=1,2,3,4$ son:

$$\mathbf{A}\vec{v}^T=(1,-1,1,-1)^T;$$
$$\mathbf{A}^2\vec{v}^T=(1,0,-1,0)^T;$$
$$\mathbf{A}^3\vec{v}^T=(0,1,0,-1)^T;$$
$$\mathbf{A}^4\vec{v}^T=(1,-1,2,-1)^T.$$

1. Compruebe que los vectores (columna) $\{\vec{v}^T,\mathbf{A}\vec{v}^T,\mathbf{A}^2\vec{v}^T,\mathbf{A}^3\vec{v}^T\}$ son linealmente independientes (recuerde hacer uso de la convención de Einstein para la sumatoria para reescribir sus expresiones lo más compactas posible).
2. Calcule $\mathbf{A}$ en la base canónica.
3. Calcule $\mathbf{A}$ en la base $\mathscr{B}=\{\vec{v}^T,\mathbf{A}\vec{v}^T,\mathbf{A}^2\vec{v}^T,\mathbf{A}^3\vec{v}^T\}$.

■

Ejercicio A.11 Opcional: Encuentre la matriz cambio de base entre las siguientes bases de $\mathscr{R}^4$:

$$\mathscr{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right\}\text{ y }\mathscr{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{pmatrix}\right\},$$

y obtenga las coordenadas del vector columna $\vec{v}$, tal que $\vec{v}^T=(2,6,-3,4)$ en cada una de las bases, corroborando la matriz cambio de base que haya encontrado. ■

Ejercicio A.12 Opcional: Considere el espacio vectorial S_2 (subespacio de $M_{2\times 2}$, que contiene todas las matrices 2×2) de las matrices cuadradas y simétricas de dimensión dos, y el espacio vectorial P_3 correspondiente a los polinomios de grado tres o menor. Se define la transformación lineal $T:S_2\to P_3$ como:

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\right)=(5a-2b+6c)+(3a-b+2c)x+(a+3b-c)x^2+(-4a+2b+c)x^3.$$

Sean, además, los siguientes pares de bases tanto para S_2 como para P_3, una de las bases del par muy bonita y la otra bien complicada; para S_2:

$$\mathscr{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathscr{B}'_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y para P_3:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_P &= \left\{2+x-2x^2+3x^3, -1-2x^2+3x^3, -3-x+x^3, -x^2+x^3\right\}, \\ \mathscr{B}'_P &= \left\{1, x, x^2, x^3\right\}. \end{aligned}$$

1. Encuentre la representación matricial de T sobre las bases $\mathscr{B}'_S$ y $\mathscr{B}'_P$ (las bases bonitas).
2. Calcule la matriz cambio de base entre las bases $\mathscr{B}_S$ y $\mathscr{B}'_S$.
3. Calcule la matriz cambio de base entre las bases $\mathscr{B}_P$ y $\mathscr{B}'_P$.
4. Encuentre la representación matricial de T sobre las bases $\mathscr{B}_S$ y $\mathscr{B}_P$ (las bases complicadas) haciendo uso de los cálculos anteriores.
5. Encuentre la representación matricial de T sobre las bases $\mathscr{B}_S$ y $\mathscr{B}_P$ directamente, para corroborar lo encontrado en el inciso anterior (obtenido a partir de un producto de matrices).

Ejercicio A.13 Identifique la matriz cambio de base entre los siguientes sistemas, a partir de la información suministrada:

1. Cilíndrico y cartesiano:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos(\theta)\odot\mathbf{e_x}\oplus\sin(\theta)\odot\mathbf{e_y} \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin(\theta)\odot\mathbf{e_x}\oplus\cos(\theta)\odot\mathbf{e_y} \\ \mathbf{e_z} &= \mathbf{e_z} \end{aligned}$$

2. Esférico y cartesiano:

$$\begin{aligned} \mathbf{e_r} &= \cos(\theta)\sin(\phi)\odot\mathbf{e_x}\oplus\sin(\theta)\sin(\phi)\odot\mathbf{e_y}\oplus\cos(\phi)\odot\mathbf{e_z} \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin(\theta)\odot\mathbf{e_x}\oplus\cos(\theta)\odot\mathbf{e_y} \\ \mathbf{e}_\phi &= \cos(\theta)\cos(\phi)\odot\mathbf{e_x}\oplus\sin(\theta)\cos(\phi)\odot\mathbf{e_y}\oplus-\sin(\phi)\odot\mathbf{e_z} \end{aligned}$$

con $(\oplus,\odot)$ la suma y producto usuales. Describa los cambios entre coordenadas.