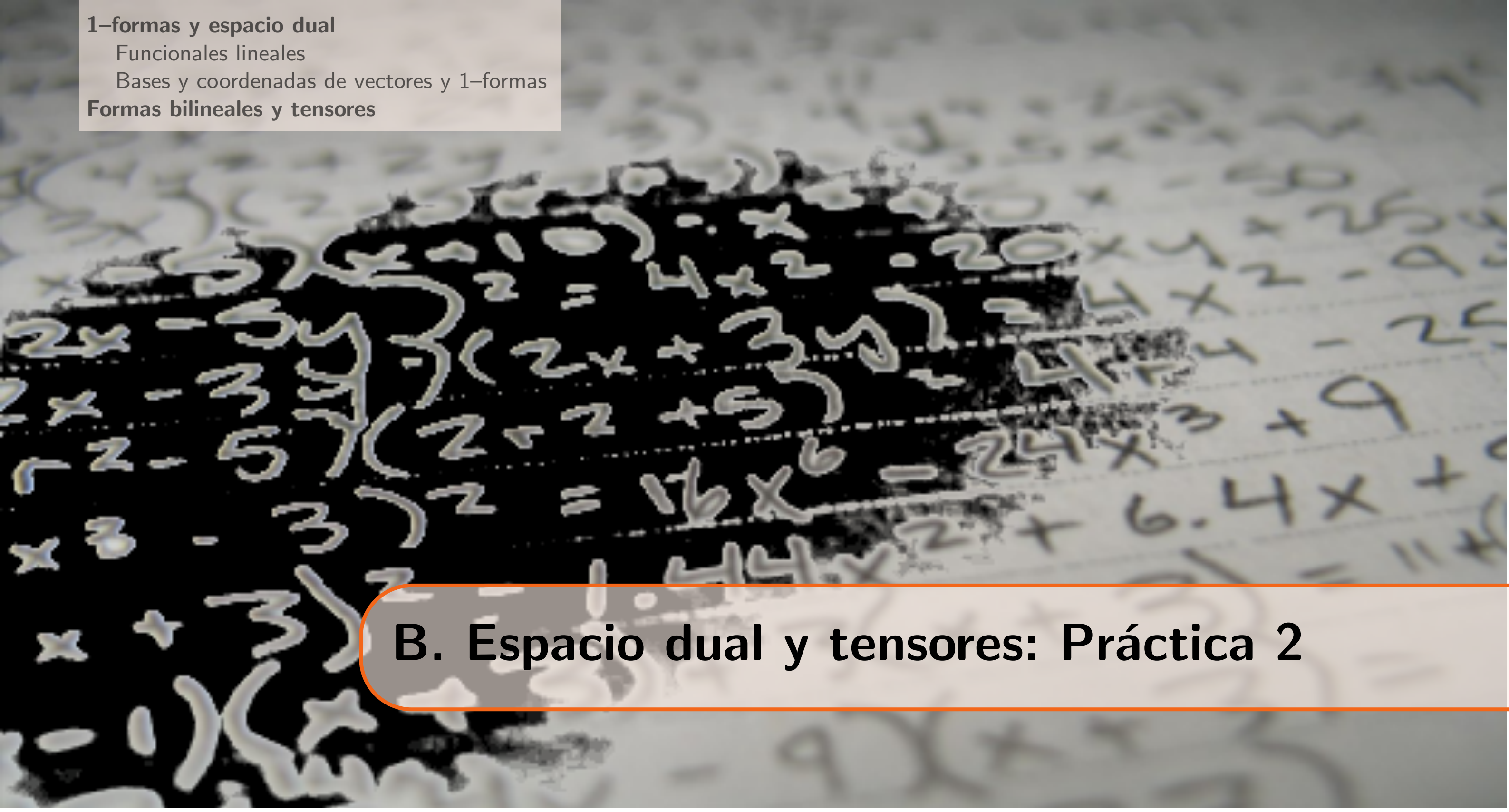

B. Espacio dual y tensores: Práctica 2

Comprende los Capítulos 4 y 5 de los apuntes correspondientes al módulo de Álgebra Lineal.

B.1 1–formas y espacio dual

B.1.1 Funcionales lineales

Problema B.1 — De cero. Eligiendo ejemplos de 1–forma (siendo la primera que mencionaremos particularmente útil), demostraremos por qué son tales revisando todas las condiciones sobre las cuales se construyen.

Ejercicio B.1 Dada una matriz $n \times n$ de elementos $a^{\mu}{}_{\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, demostrar que la traza

$$Tr(\mathbf{A}) = a^{\mu}{}_{\mu}$$

es una 1–forma. Para ello:

1. precise que las matrices cuadradas ($\mathscr{R}^{n\times n}$) forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales;
2. precise que los números reales ($\mathscr{R}$) forman un espacio vectorial sobre el propio cuerpo de los reales;
3. demuestre que la aplicación $Tr(\mathbf{A}) : \mathscr{R}^{n\times n} \to \mathscr{R}$ es una transformación lineal.

Ejercicio B.2 Sea V el espacio de los polinomios de grado ≤ 2, $\mathscr{R}_2[x]$. Sean $t_1, t_2, t_3 \in \mathscr{R}$ escalares distintos y arbitrarios. Definamos la transformación $L^i : \mathscr{R}_2[x] \to \mathscr{R}$ con $i = 1, \ldots, 3$ a través de $L^i(p(x)) = p(t_i)$. Verifique que L^i es una 1–forma sobre V, i.e.:

1. precise que el espacio de los polinomios de grado ≤ 2, $\mathscr{R}_2[x]$ es un espacio vectorial (recuerde que ya demostró que $\mathscr{R}$ es otro espacio vectorial en el ejercicio anterior);
2. demuestre que la transformación $L^i : \mathscr{R}_2[x] \to \mathscr{R}$ es lineal.

B.1.2 Bases y coordenadas de vectores y 1–formas

Problema B.2 — De aquí para allá, de allá para aquí. Ya hemos visto en los problemas de la Sección A.3 cómo son los cambios de base entre vectores y sus coordenadas contravariantes en sistemas de uso común en Física. Ahora toca comparar esos cambios con los obtenidos para 1–formas y sus coordenadas covariantes.

Ejercicio B.3 Partiendo del Ejercicio B.2:

1. demuestre que las 1–formas $\{L^i\}$ forman una base del espacio dual V^*, para ello tome como base de $\mathscr{R}_2[x]$ el conjunto $(1, x, x^2)$ donde aquí el supraíndice indica potencia;
2. si bien el conjunto $\{L^i\}$ forma una base del espacio dual V^*, no son la base dual de $(1, x, x^2)$. Encuentre la base de V cuya base dual es $\{L^i\}$;
3. tomando al conjunto $(1, x, x^2)$ como base de V, encuentre su base dual en V^*, escribiendo a las 1–formas en la base $\{L^i\}$;
4. teniendo dos bases de V, con sus respectivas bases duales en V^*, encuentre el cambio de base y coordenadas en V y V^*. Explique entonces, por qué los vectores de V se les llama contravariantes y a las 1–formas de V^*, covariantes.

■

B.2 Formas bilineales y tensores

Problema B.3 — Tensores cartesianos, el cable a tierra?. Haremos un *paseo* por tensores cartesianos subidos a una forma bilineal, para ello recuerde tomar $\mathscr{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ y su dual (con la correspondiente dimensión) para operar.

Consideremos la aplicación sobre $\mathscr{R}^2$: $F(\vec{u};\vec{v}) = \alpha u^x v^x + \beta u^x v^y + \gamma u^y v^x + \delta u^y v^y$, tal que α, β, γ y δ sean distinto de cero:

Ejercicio B.4 pruebe que F es una forma bilineal sobre $\mathscr{R}^2$. ■

Ejercicio B.5 Ahora sí, el *paseo*:

1. Demuestre que puede ser obtenida a partir de dos elementos del espacio dual V^* (encuéntrelos) al aplicar el producto tensorial entre ellos (i.e. pruebe cada una de las condiciones del producto tensorial);
2. dado un espacio producto tensorial $V^* \otimes V^*$, encuentre las coordenadas de F en $V^* \otimes V^*$;
3. asocie a F un tensor dos veces contravariante T tal que devuelva en $\mathscr{R}^2$ el mismo resultado que F, y encuentre sus coordenadas en $V \otimes V$.

■

Ejercicio B.6 Encuentre la forma cuadrática asociada a F, probando el orden de la homogeneidad (si no lo recuerda, averigue qué quiere decir que una función es homogénea de orden n). ■

Problema B.4 — Tensores en general, el cohete a la luna. Dejaremos el *paseo* del problema anterior, para iniciar otro... aunque un poco más *cósmico*, por el nivel de abstracción que interviene en los ejercicios.

Consideremos un tensor del tipo $\binom{2}{1}$, $T : \mathscr{R}^2 \times \mathscr{R}^2 \times \mathscr{R}^{2*} \to \mathscr{R}$, donde tomamos como base para $\mathscr{R}^2$, $\mathscr{B} = \{(1,3),(1,0)\}$ y que, además, en la base dual correspondiente (i.e. $\mathscr{R}^{2*}$), T tiene por coordenadas los valores: $t^1_{11} = 6$, $t^1_{12} = 8$, $t^1_{21} = 12$, $t^1_{22} = 16$, $t^2_{11} = 9$, $t^2_{12} = 12$, $t^2_{21} = 18$ y $t^2_{22} = 24$.

Ejercicio B.7 Primero hallaremos al tensor T, explícitamente (i.e. en componentes):

1. encuentre la base dual, $\mathscr{B}^*$, asociada a $\mathscr{B}$;
2. escriba al tensor T a partir de sus coordenadas en $\mathscr{B}^* \times \mathscr{B}^* \times \mathscr{B}$;
3. reescriba al tensor T en forma explícita, identificando al producto tensorial que lo define como el de una forma bilineal y un vector[a].

■

[a] Dada la complejidad del sistema no lineal que debería resolver en este apartado, para reducirlo haga uso de los siguientes valores para las componentes del (único) vector a partir del cual está construido T: $\vec{v} = (5,6)$.

Ejercicio B.8 Otra representación del tensor T:

1. si la base para $\mathscr{R}^2$ ahora es: $\mathscr{B}' = \{(0,1),(-1,1)\}$, encuentre la matriz cambio de base asociada a la transformación $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$;
2. averigue la base dual para $\mathscr{B}'$ haciendo uso de la matriz cambio de base;
3. a partir de a) el tensor T escrito de forma explícita, b) las nuevas bases, obtenga las coordenadas de T en las nuevas bases (sistema primado).

■

Ejercicio B.9 Vuelva a encontrar las coordenadas del tensor T en las bases primadas, pero ahora a partir de su expresión en coordenadas en las bases sin primar, i.e. utilizando las matrices cambio de base. De esta forma, corrobore la igualdad entre los valores de las coordenadas obtenidos en este ejercicio haciendo uso de las matrices cambio de base, con los obtenidos en el ejercicio anterior, donde hizo uso de la expresión del tensor en componentes. ■