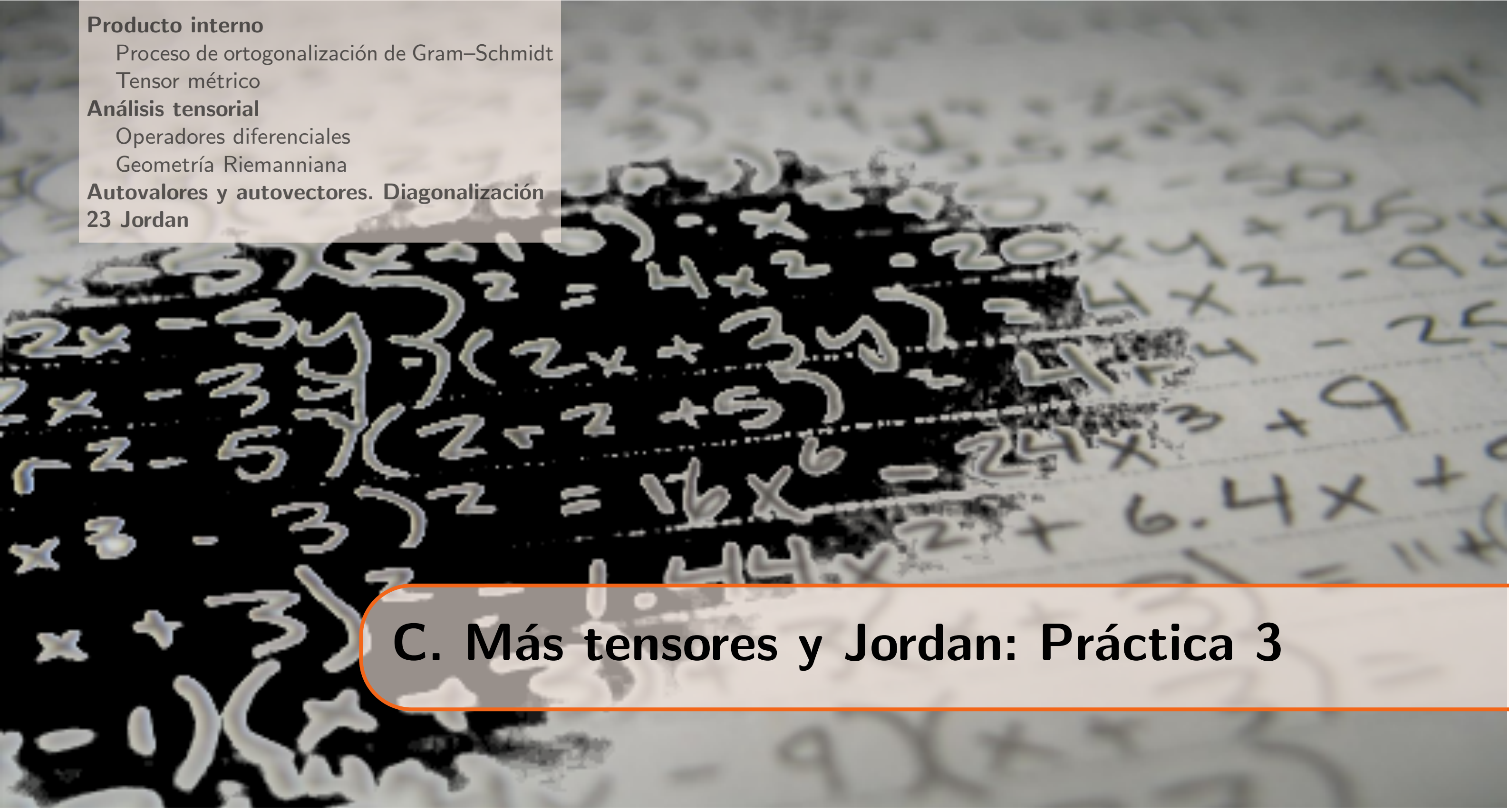

C. Más tensores y Jordan: Práctica 3

Comprende los Capítulos 6, 7, 9 y 10 de los apuntes correspondientes al módulo de Álgebra Lineal.

C.1 Producto interno

C.1.1 Proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt

Problema C.1 — Construyendo bases ortonormales. Sea el conjunto $B = \{f,g,h\}$ donde $f(x) = 1+x$, $g(x) = x+x^2$ y $h(x) = 1+x^2$ con el producto definido por: $\langle f,g\rangle = f(t_0)g(t_0) + f(t_1)g(t_1) + f(t_2)g(t_2)$ (donde $t_0 = -1, t_1 = 0$ y $t_2 = 1$).

Ejercicio C.1 Compruebe que el producto $\langle f,g\rangle$ así definido cumple con los axiomas del producto interno. ■

Ejercicio C.2 A partir del conjunto B construya una base ortonormal para el espacio $\mathscr{R}_2[x]$. ■

Problema C.2 — Probando la independencia lineal. Sea $\mathscr{R}^3$ con el producto interno canónico y considere los siguientes vectores:

$$\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (-1,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,1), \vec{u}_4 = (0,1,0), \vec{u}_5 = (1,2,0).$$

Ejercicio C.3 Compruebe que estos vectores forman un conjunto linealmente dependiente utilizando el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. Grafique cada uno de los pasos involucrados en el proceso. ■

C.1.2 Tensor métrico

Problema C.3 — Coordenadas curvilíneas. Dado que queremos, al menos, sobrevolar el tensor métrico, vamos a trabajar con él en los dos sistemas clásicos de coordenadas curvilíneas:

Ejercicio C.4 Calcule la métrica para los siguientes sistemas de coordenadas:
- coordenadas polares,
- coordenadas esféricas.

¿Encuentra valores distintos de cero fuera de la diagonal? Sin buscar en ningún lado, solo pensándolo usted mismo, ¿por qué cree que pasa esto?
Finalmente, construya el *elemento de línea* correspondiente a cada métrica. ■

C.2 Análisis tensorial

C.2.1 Operadores diferenciales

Problema C.4 — Sólo porque somos malos. Hacemos cosas malas.

Ejercicio C.5 Considere las coordenadas cilíndricas:
1. determine los elementos del tensor métrico,
2. calcule los símbolos de Christoffel,
3. calcule el Laplaciano para un campo escalar y verifique su resultado,
4. aplique dicho Laplaciano a un tensor del tipo $\binom{0}{3}$ y demuestre que:

$$\nabla^2[\mathbf{T}] = \left[T^{\mu\nu\zeta}{}_{;\rho\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2} T^{\mu\nu\zeta}{}_{;\theta} \right)_{;\theta} + T^{\mu\nu\zeta}{}_{;zz} \right] \odot \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\zeta .$$

■

C.2.2 Geometría Riemanniana

Problema C.5 — Avanzada hasta el tensor de Einstein. Sea el elemento de línea correspondiente a una métrica estática y esféricamente simétrica: $ds^2 = -e^{a(r)}dt^2 + e^{b(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$, donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$.

Ejercicio C.6 Identifique los elementos del tensor métrico y calcule el tensor de curvatura de Riemann. ¿Existen $a(r)$ y $b(r)$ tal que el espacio que describe esa métrica sea plano? ¿en tal caso, qué valor deberían tomar las entradas del tensor de curvatura? ■

Ejercicio C.7 Obtenga el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, pero para ello primero calcule:
1. los símbolos de Christoffel,
2. el tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel y sus derivadas[a],
3. el tensor de Einstein a partir del tensor y el escalar de Ricci: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.

■

[a] Existe una identidad que puede utilizar, búsquela.

C.3 Autovalores y autovectores. Diagonalización

Problema C.6 — Acá empiezan las cuentas en serio. Primero, vamos a remangarnos para ver un poco lo que viene, i.e. el siguiente ejercicio es para ver la metodología y el tipo de cuenta que hay involucrado.

Ejercicio C.8 Encuentre el polinomio característico, los autovalores, y los autovectores asociados a la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Identifique los autovectores base de los espacios asociados a los autovalores correspondientes. Sin hacer cuentas, es diagonalizable la matriz? Explique. Construya la matriz Λ para efectuar el proceso de diagonalización. Obtenga la matriz diagonal. Recuerde que puede chequear todas sus cuentas haciendo uso del *Wolfram Alpha*. ■

Ahora, un poco de creatividad...

Ejercicio C.9 Fabrique un operador tal que todos sus autovalores sean reales y los autovectores asociados a distintos autovalores sean ortogonales entre sí. Demuéstrelo, para ello represente al operador en forma matricial y calcule sus autovalores y autovectores. Qué relación hay entre las multiplicidades algebraicas y geométricas asociadas a los subespacios S_λ? ■

Por último, **un ejercicio que deberá recordar para cuando trabajemos con ecuaciones diferenciales**. Considere el caso del péndulo, la ecuación que gobierna su dinámica es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal y a coeficientes constantes. Si linealizamos esa ecuación diferencial alrededor de uno de sus puntos fijos, podemos encontrar una representación matricial del problema. No desespere, por ahora todo esto resultará anecdótico, pero para el final de la cursada entenderá completamente su significado. Ahora bien, dicha representación matricial es con la que trabajaremos a continuación.

Ejercicio C.10 Sea la matriz $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

encuentre el polinomio característico, los autovalores y autovectores. Diagonalice. Grafique las direcciones de los autovectores. ■

Lo que acaba de graficar, son las direcciones que representan los ejes del sistema donde la ecuación diferencial (linealizada) del péndulo, se desacopla. Esto permite integrar fácilmente dicha ecuación como dos ecuaciones de primer orden (lineales, a coeficientes constantes), obteniendo como resultado dos soluciones de tipo exponencial, donde los exponentes están dados por los autovalores. De acuerdo a los signos de los autovalores tendremos soluciones exponenciales crecientes o decrecientes, cuyo análisis permite evaluar la **estabilidad** del punto donde se procedió con la linealización.

R En otras palabras, los autovalores y autovectores pueden utilizarse para caracterizar la estabilidad lineal en sistemas dinámicos, algo que profundizaremos en el módulo de ecuaciones diferenciales.

C.4 23 Jordan

Problema C.7 — Diagonal y casi diagonal. A veces podremos diagonalizar, otras no, sin embargo en estos casos también se puede obtener información muy valiosa sobre el sistema.

Ejercicio C.11 Llevar las siguientes matrices a su forma canónica (normal) de Jordan, identificando los bloques de Jordan en la matriz resultante:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Explicite la relación entre las multiplicidades geométrica y algebraica de los tres operadores representados con las matrices $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$. ■

Otro ejercicio que deberá recordar cuando trabajemos con ecuaciones diferenciales, note que lo que estamos haciendo es trabajar sobre un formalismo que nos facilitará las cosas más adelante.

Ejercicio C.12 Encuentre la forma de Jordan de la matriz $\mathbf{F}$ que detallamos a continuación, calcule su exponencial. Identifique la matriz nilpotente.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

■