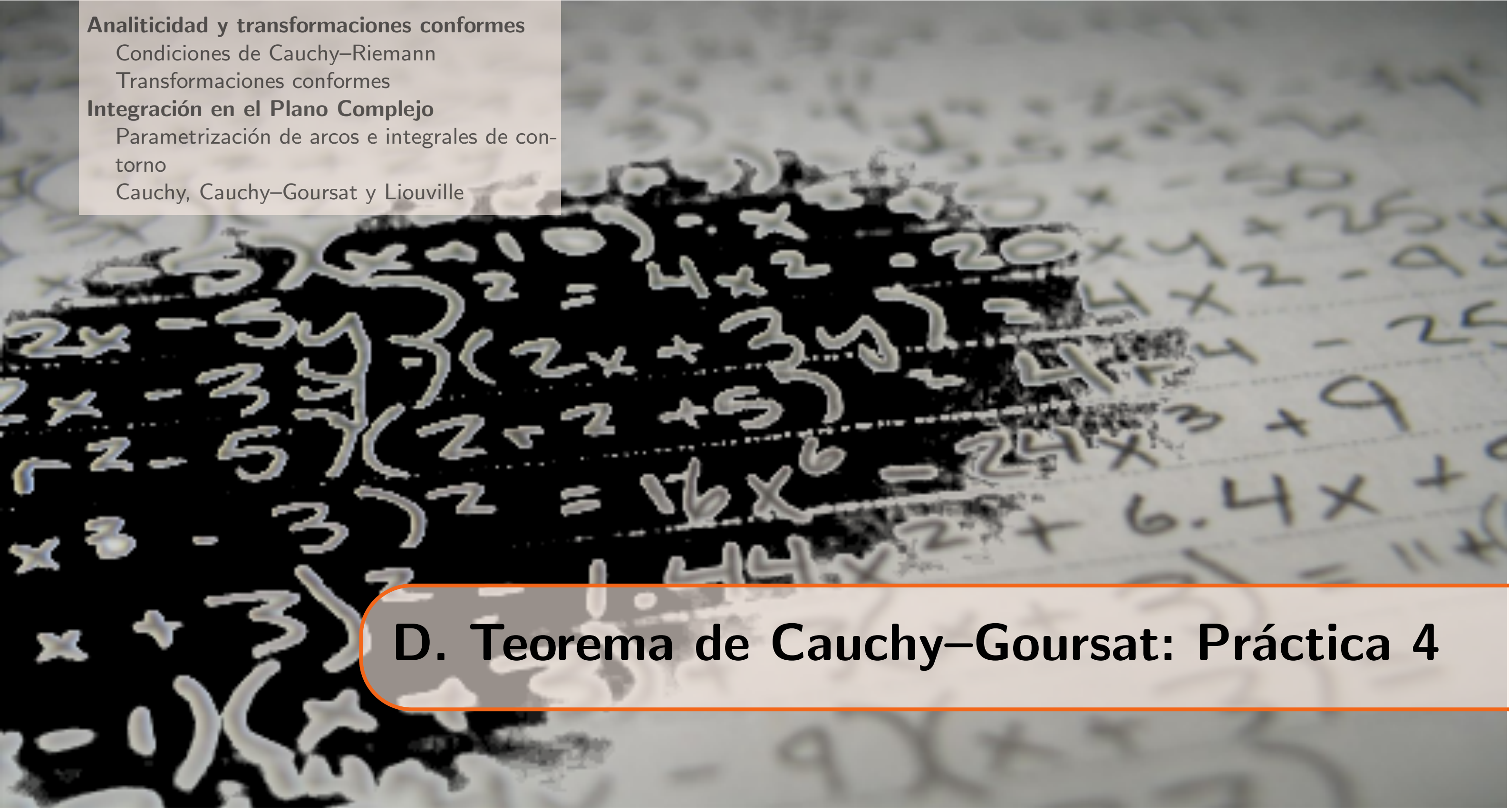

D. Teorema de Cauchy–Goursat: Práctica 4

D.1 Analiticidad y transformaciones conformes

D.1.1 Condiciones de Cauchy–Riemann

Incluimos a continuación uno de los teoremas más importantes del módulo de variable compleja, el cual le servirá para el primer ejercicio.

Teorema D.1.1 — Condiciones suficientes. Sea la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ definida en algún entorno ε de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de ese entorno y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en (x_0, y_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.

Problema D.1 — Ecuaciones de Cauchy–Riemann. Comenzamos la práctica haciendo uso de las condiciones de Cauchy–Riemann.

Ejercicio D.1 Estudie en qué puntos de $\mathbb{C}$, la función:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{|z|^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

es analítica, calculando su derivada en los puntos en que esta exista. En los que no, demuéstrelo a partir del cálculo de los límites por definición. ■

D.1.2 Transformaciones conformes

Problema D.2 — Tan solo un ejemplo. Ahora que estamos algo más familiarizados con las condiciones para la analiticidad, podemos trabajar, al menos con un ejemplo, las transformaciones conformes, transformaciones que conservan ángulos.

Ejercicio D.2 Encuentre una transformación conforme que lleve el interior del disco unidad centrado en el origen al semiplano derecho, y su circunferencia, al eje imaginario.

Grafique[a].

[a] Ayuda: lea el Churchill para orientarse sobre la forma de la transformación.

Estas transformaciones serán de utilidad cuando se trate el módulo de ecuaciones diferenciales.

D.2 Integración en el Plano Complejo

D.2.1 Parametrización de arcos e integrales de contorno

Clases básicas de arcos adecuados para la evaluación de las integrales en el plano complejo:

- Arco simple o arco de Jordan: $\mathbf{C} = \{z \in \mathbb{C} : z = z(t) \,\mathrm{con}\, a \leqq t \leqq b\}$ es un arco simple o arco de Jordan si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$ (i.e. inyectividad).
- Curva cerrada simple o curva de Jordan: cuando el arco es simple excepto por el hecho de que $z(b) = z(a)$ (i.e. un mapeo continuo sobre el círculo).

Problema D.3 — Parametrización de arcos. Comencemos a mover el lápiz.

Ejercicio D.3 Escriba paramétricamente la curva de Jordan con orientación positiva que describe una circunferencia de radio la unidad alrededor de un punto arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$ (este tipo de curva se encuentra repetidamente en las demostraciones y es de suma utilidad en la resolución de ejercicios, como corroborará durante la práctica, por lo que conviene familiarizarse con ella). ■

La longitud del arco $\mathbf{C}$ (ahora diferenciable) parametrizada por $z(t)$ está dada por la evaluación de la expresión:

$$L := \int_a^b |z'(t)|dt;\, |z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2},$$

que se desprende directamente de la definición de longitud de arco con la cual ya se encuentra familiarizado.

Un contorno, o arco suave a trozos, es un arco que consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Cuando sólo coinciden los valores inicial y final, un contorno $\mathbf{C}$ se llama contorno cerrado simple. El **Teorema de la curva de Jordan** establece que los puntos de una contorno cerrado simple dividen al plano en una región interior (acotada) y otra exterior (no acotada).

Problema D.4 — Longitud de arco e integrales de contorno, primitivas. Ahora haremos uso de las parametrizaciones para poder calcular integrales.

Ejercicio D.4 Calcular la longitud de la curva de Jordan del Pro. D.3 que antecede. ■

Ejercicio D.5 Calcular las siguientes integrales de contorno usando representaciones paramétricas:

1. $\oint_{\mathbf{C}} z^n dz$ con $\mathbf{C}$ la circunferencia de radio la unidad, centrada en el origen, $n \in \mathbb{Z}$. El resultado de esta integral para $n = -1$ es fundamental como se verá en los

siguientes ejercicios.

2. $\int_C \frac{z+2}{z} dz$ con C descripta por las curvas que siguen y orientación positiva:
   - la semicircunferencia superior de radio la unidad;
   - la semicircunferencia inferior de radio la unidad;
   - la circunferencia de radio unidad (sin hacer otras cuentas de las que ya hizo).
3. $\oint_C \sqrt{z}dz$ con C la circunferencia de radio unidad, centrada en el origen.
4. $\int_C (z-1)dz$ con C el arco desde $z=0$ hasta $z=2$, utilizando dos parametrizaciones diferentes con igual orientación elegidas por usted.

¿En qué ejemplos podría haber resuelto calculando la primitiva? Argumente. ■

Ejercicio D.6 Evalúe $\int_C \left(12z^2-4iz\right) dz$ con C la curva dada por $y=x^3-3x^2+4x-1$ entre los puntos (1,1) y (2,3):

- parametrizando con segmentos entre los puntos (1,1) y (2,1) y entre (2,1) y (2,3);
- por medio de la primitiva.

■

D.2.2 Cauchy, Cauchy–Goursat y Liouville

Empezamos detallando algunos resultados que nos serán de utilidad para realizar los ejercicios que siguen.

Teorema D.2.1 — Teorema de Cauchy–Goursat (extensión a dominio múltiplemente conexo). Supongamos que:

1. C es un contorno cerrado simple, con orientación positiva;
2. C_k con $k=1,2,\ldots,n$ denota un número finito de contornos cerrados simples, orientados positivamente, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común (disjuntos).

Si una función f es analítica en la región cerrada formada por los puntos interiores a C o del propio C, excepto los puntos interiores a cada C_k, entonces:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz.$$

Corolario D.2.2 Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples positivamente orientados, donde C_2 es interior a C_1. Si una función es analítica en la región cerrada que forman esos contornos y los puntos situados entre ellos, entonces:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Teorema D.2.3 — Fórmula integral de Cauchy. Sea f anlítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces:

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

Teorema D.2.4 — Teorema de Liouville. Si f es entera y acotada en todo el plano complejo, $f(z)$ es constante en el plano.

Problema D.5 — Teorema de Cauchy–Goursat, deformación de caminos y más. Es hora de aplicar los resultados teóricos anteriores... y algo más.

Ejercicio D.7 A partir de la fórmula integral de Cauchy derive la expresión para la fórmula de la diferenciación de Cauchy:

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

A partir del resultado del ejercicio anterior pruebe que $f(z)$ (analítica) se puede expandir como una serie de Taylor, i.e.:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

¿Qué nos dicen estos resultados? ■

Ejercicio D.8 Sin hacer cuentas, evalúe las siguientes integrales de contorno:

1. $\oint_{\mathrm{C}} e^z dz$ con C el contorno del panel izquierdo de la Fig. D.1.
2. $\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z^2}$ con C la parametrización de la elipse $(x-2)^2 + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$.

■

Ejercicio D.9 Evalúe a) haciendo uso del teorema de deformación de caminos y calculando la integral de contorno correspondiente, b) haciendo uso sólo de los teoremas anteriores, i.e. sin hacer cuentas:

1. (con ayuda gráfica) $\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z-i}$ con C el contorno señalado en el panel derecho de la Fig. D.1.
2. (generalización de ejercicios que resolvió con anterioridad) $\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ y con C un contorno que defina una región D que contenga a z_0.
3. (sin ayuda gráfica) $\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z^2+1}$ con C la circunferencia de radio 3, centrada en el origen.

■

Ejercicio D.10 Demuestre a partir de $\oint_{\mathrm{C}} \frac{e^{kz}}{z} dz$ con C la parametrización de la circunferencia de radio la unidad, centrada en el origen, que:

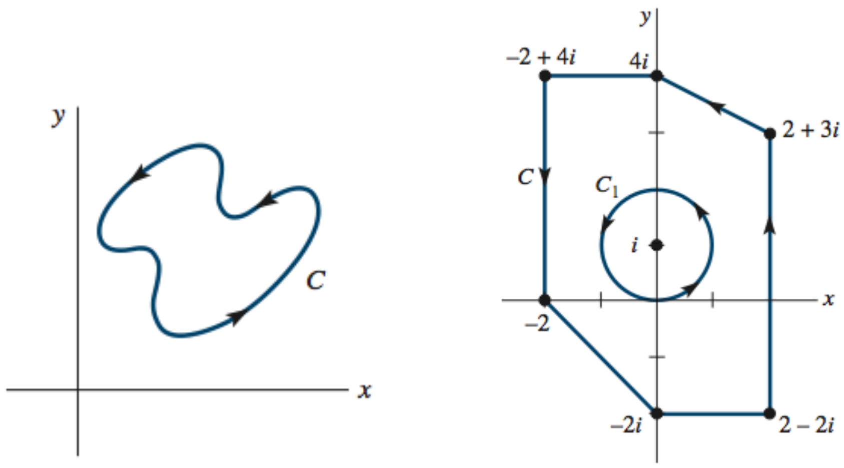

Figura D.1: Gráficas para los Ejs. D.8 y D.9.

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos(\theta)} \sin\left(k\sin(\theta)\right) d\theta = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos(\theta)} \cos\left(k\sin(\theta)\right) d\theta = 2\pi.$$

■

Ejercicio D.11 Evalúe las integrales:

1. $\oint_{\mathbf{C}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ con **C** la circunferencia $|z-i| = 3$.
2. $\oint_{\mathbf{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ con **C** la circunferencia $|z| = 3$.

■

Problema D.6 — Y terminamos con Liouville. Para que lo tenga en cuenta.

Ejercicio D.12 Demuestre el teorema de Liouville probando que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$[a]. ¿$\sin(z)$ y $\cos(z)$ están acotadas (en el plano complejo) como sus contrapartes reales? ■

[a] **Ayuda:** integre $\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ en el contorno simple cerrado $\mathbf{C} : |z-z_0| = R$.

Al finalizar la práctica notará que con pocas cuentas, encontró una gran variedad de resultados. Esto habla de lo potente y bello del análisis en el plano complejo. No obstante, las cuentas pueden complicarse en situaciones menos directas, y hacia allí vamos en la siguiente práctica.