E. Teorema de los residuos: Práctica 5

E.1 Analiticidad

Problema E.1 — Variado. Comenzamos la práctica resolviendo ejercicios dispares de varios temas, como para entrar en calor.

E.1.1 Transformaciones conformes

Ejercicio E.1 Sea ∂C el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Determinar la región en el plano w que sea producto de aplicar sobre ∂C la transformación $w = z^2$. Grafique, y especifique a qué región corresponden los puntos interiores a ∂C que yacen por debajo de la diagonal (aquélla que pasa por el origen), por encima y sobre la misma. ■

E.1.2 Funciones elementales

Ejercicio E.2 Determinar todos los valores de z para los cuales se cumple la igualdad: $\mathrm{e}^{3z} = i$, usando y sin usar logaritmos. ■

Ejercicio E.3 Pruebe que $\overline{\tan(z)} = \tan(\bar{z})$. ■

E.1.3 Límites

Ejercicio E.4 Calcule el $\lim_{z\to e^{i\pi/3}} \left(z - e^{i\pi/3}\right)\left(\frac{z}{z^3+1}\right)$. No separe en funciones componente. ■

E.1.4 Analiticidad

Ejercicio E.5 Determine primero si se satisfacen las condiciones de Cauchy–Riemann y luego obtenga las regiones de analiticidad para $f(z) = \cos(2z)$. ■

Ejercicio E.6 Pruebe que la función $u(x,y) = 2x - 2xy$ es armónica. Determine la función $f(z)$ analítica cuya parte real es u. ■

Ejercicio E.7 Sea $f(z)$ una función analítica tal que $\operatorname{Im}[f'(z)] = 6x(2y-1)$, $f(0) = 3-2i$ y $f(1+i) = 5+2i$. Determine f. ■

E.2 Integración

Problema E.2 — Recargado. Ahora unos (pocos) ejercicios, también variados, pero como para romper lápices. Antes, algunos resultados que le resultarán de utilidad.

Teorema E.2.1 — Teorema de los residuos. Si ∂C es un contorno cerrado simple positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k $(k = 1,2,\dots,n)$ interiores a ∂C, entonces:

$$\oint_{\partial C} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Teorema E.2.2 — Series de Laurent. Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z-z_0| < R_2$, y sea ∂C cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0, orientado positivamente, contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

con $R_1 < |z-z_0| < R_2$, donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

con $n = 0,1,2,\dots$ y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}},$$

con $n = 1,2,\dots$

E.2.1 Integrales reales y teorema de los residuos

Ejercicio E.8 Sea ∂C el contorno positivamente orientado del cuadrado cuyos lados yacen a lo largo de las rectas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$. Evalúe la integral:

$$\oint_{\partial C} \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} \text{ donde } x_0 \in (-2,2).$$

Ejercicio E.9 Calcule las siguientes integrales reales haciendo uso del teorema de los residuos[a]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)dt}{5-4\cos(t)},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

[a]**Ayuda:** haga uso de la parametrización del círculo para llevar la primera integral al campo complejo. Utilice el contorno dado por el segmento (-R,R) sobre la recta real y la semi–circunferencia superior para resolver la segunda integral.

E.2.2 Series de Laurent

Ejercicio E.10 Calcular las series de Laurent para la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

dentro de los tres siguientes anillos: a) $\mathrm{A}_{0,1}(0)$, b) $\mathrm{A}_{1,2}(0)$[a] y c) $|z| > 2$:

- usando series geométricas,
- usando el teorema de los residuos.

[a]Nótese que $\mathrm{A}_{a,b}(z_0)$ se refiere al anillo $a < |z-z_0| < b$.