F. EDOs de primer orden: Práctica 6

F.1 EDOs de Primer Orden

F.1.1 Métodos elementales de resolución

Problema F.1 — Primer orden. Comenzamos la práctica clasificando EDOs y resolviendo sólo aquéllas que sean de primer orden. Entonces, para cada una de las siguientes EDOs, indique:

- Orden,
- linealidad,
- tipo de coeficientes,
- y si tiene término independiente.

Sólo en caso de ser una ecuación de primer orden, indique si es homogénea (y demuestre), luego resuelva, dejando explícito el método de resolución utilizado (*sustitución, homogéneas, exactas, factor integrante, variables separables*[1] o cualquier combinación de estos métodos) y los puntos en los cuales encuentra problemas (en caso de tratarse de posibles soluciones, aclare si efectivamente las descarta como tales). Al encontrar la solución, si la deja en su formato implícito, aclárelo. Finalmente, de tratarse de un problema de valores iniciales, indicar tanto la solución general como la particular.

R **Pérdida de soluciones y soluciones en EDOs no lineales.** La pérdida de soluciones se da por deficiencia del proceso de resolución. Las EDOs tienen infinitas soluciones, las EDOs lineales tienen la facultad particular que cada una de sus soluciones puede ser reescrita como combinación lineal de un conjunto finito de soluciones, i.e. existe una base de soluciones cuyo cardinal es el orden de la EDO. Las EDOs no lineales carecen de esta propiedad, incluso muchas veces ni siquiera se puede obtener una fórmula para la solución general. La pérdida de soluciones es esencialmente, deficiencia del método en obtener soluciones constantes. En el caso de las EDOs lineales, esta es la pérdida del cero, o solución trivial, cuando en el caso de EDOs no lineales, pueden ser constantes diferentes de cero.

[1] Los métodos que figuran en *itálica* a lo largo de la práctica son los únicos necesarios para resolverla, por lo tanto busque los mecanismos correspondientes entre sus apuntes.

R **Comentario respecto a las ecuaciones homogéneas.** Cuando una EDO de primer orden no tiene término independiente, es cuando se puede analizar si es homogénea en el sentido de las funciones M y N. En caso de tener término independiente, no tiene sentido analizar esta característica pues dicho término impide la transformación de la EDO en variables separables, que es a lo que apunta el cambio implícito utilizado en las ecuaciones denominadas homogéneas.

Ejercicio F.1 — Análisis integral. Clasifique como se le ha indicado y, si corresponde, resuelva.

1. $\sin(x)y'' - 4xy' + y = \cos(x^2)$;
2. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$;
3. $r'(\theta) = r$, resuelva en polares y en cartesianas, indique qué diferencias observa;
4. $y'' + \cos(x+y) = \cos(x)$;
5. $x'' + \omega^2 x = 0$;
6. $y' + \frac{4y}{x} = x^3y^2$ con $y(2) = -1$, $x > 0$, determinar el intervalo de validez de la solución (note que es una ecuación diferencial de Bernoulli);
7. $e^{2y} - y\cos(xy) = -\left[2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right] y'$;
8. $\left[\frac{1}{1+y^2} + \cos(x) - 2xy\right] y' = y^2 + y\sin(x)$ con $y(0) = 1$;
9. $y' = \frac{y-4x}{x-y}$, hacer uso del cambio de variables $y = xu(x)$;
10. $\frac{1}{2}mx'^2 + U(x) = E_0$;
11. $y' = e^{2x} + y - 1$;
12. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) dx = -\left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) dy$;
13. $(2x-y-4)\,dy = (2y-x+5)\,dx$, hacer uso del cambio de variables $u = x - x_0$ y $v = y - y_0$ e interprete geométricamente el cambio.

■

F.1.2 Modelado de problemas

Problema F.2 — Un cachetazo de realidad. Es claro que la naturaleza no nos pone las ecuaciones sobre la mesa. Aunque muchas veces el sólo hecho de resolverlas puede ser un dolor de cabeza (como quizás ya habrá notado del problema anterior), a veces el mayor de los obstáculos es interpretar matemáticamente lo que observamos, para luego construir la ecuación diferencial (el modelo) que lo describa.

Dados los siguientes problemas, primero construya la ecuación diferencial apropiada, y luego resuelva.

Ejercicio F.2 Suponga un tanque de 1500 litros que inicialmente contiene 600 litros de agua con 5 kg de sal disuelta en ella. El agua entra al tanque a razón de 9 litros por hora, con una concentración de sal dada por $f(x) = \frac{1}{5}(1+\cos(t))$ kg por litro. La solución, que suponemos homogénea por simplicidad, abandona el tanque a razón de 6 litros por hora. ¿Cuánta sal habrá en el tanque cuando este desborde?

■

Ejercicio F.3 Una población de insectos, en una dada región, crece con un ritmo proporcional a ella misma. En ausencia de agentes externos, la población se triplicaría en 2 semanas. Sin embargo, cada día hay una migración neta al área de 15 insectos, pero 16 serán comidos por aves locales cuando otros 7 morirán por causas naturales. Si inicialmente la población es de 100 insectos, ¿acaso la misma sobrevivirá? De no ser el caso, ¿cuándo dejará de haber insectos en la región?[a]

[a]Ayuda: note que necesitará dos ecuaciones diferenciales, la primera para determinar el factor de proporcionalidad entre la población y su derivada, y la segunda para, a partir de este factor y la inclusión de los agentes externos, determinar la evolución diaria de la población.

Ejercicio F.4 Una masa de 50 [kg] se dispara desde un cañón, apuntando hacia arriba, a una velocidad inicial de 10 [m/s] desde un puente situado a 100 [m] por encima del suelo. Si la resistencia del aire está dada por $5 \times v$ con v la velocidad de la masa, determine la velocidad de esta al tocar el suelo (deberá suponer que el cañón cae por un agujero en el puente luego de disparar, por el mismo por el que la masa atravesará el puente).[a]

[a]Ayuda: escriba la ecuación diferencial para la velocidad y luego integre para encontrar el tiempo al cual la masa tocó el suelo, con este dato evalúe la velocidad a dicho tiempo para responder la pregunta. Considere la aproximación de aceleración constante para la atracción gravitaoria.

Ahora bien, como el modelado en las ciencias astronómicas y de la atmósfera, tanto como en la geofísica, es un problema de interpretación física, y siendo esta materia de Matemáticas, nos limitaremos en lo que sigue a estudiar las herramientas que les permitan obtener información, una vez construidos los modelos (i.e. las ecuaciones diferenciales).

F.2 Método de Picard

Problema F.3 — Pispamos Picard. Si bien el *método de Picard* no es un método adecuado para resolver a mano, es muy útil para programarlo, dada su naturaleza iterativa. No obstante, resolvamos un par de ejemplos para entender cómo opera.

R **Condiciones suficientes (no necesarias) de existencia y unicidad de soluciones.** Existencia: continuidad de $f(x,y)$ siendo $y' = f(x,y)$, implica que existe al menos una solucion al PVI. Unicidad: la solución es única si se cumples dos condiciones, i) f y ii) df/dy son continuas, ergo se las puede acotar. De la misma manera se satisface la unicidad bajo las siguientes dos condiciones, siendo la condición de Lipschitz continua más débil que la continuidad de df/dy: i) f continua y ii) f Lipschitz continua, i.e. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ con L la constante de Lipschitz.

Ejercicio F.5 Primero pruebe las condiciones suficientes de existencia y unicidad de las soluciones, luego resuelva aplicando Picard. Encuentre la expresión a la que convergen las series. Grafique secuencias de aproximaciones para observar la validez de su convergencia a la solución.

1. $y^{(1)} = 2x(1-y)$, con $y(0) = 2$;
2. $y^{(1)} = 2(y+1)$, con $y(0) = 0$.