G. EDOs de segundo orden: Práctica 7

G.1 EDOs de segundo orden a coeficientes constantes

G.1.1 Homogéneas de segundo orden

Problema G.1 — El cero es la clave. Resuelva las siguientes EDOs.

Ejercicio G.1 Haciendo uso del *ansatz de la exponencial* resuelva, dejando explícitas las soluciones generales, además de las correspondientes al PVI cuando corresponda. Haga referencia al tipo de raíces que tiene el polinomio característico. Si estas fueran repetidas, deduzca la segunda solución linealmente independiente con el *método de reducción del orden*.

1. $4y'' - 5y' = 0$ con $y(-2) = 0$ y $y'(-2) = 7$;
2. $y'' + 2iy' + y = 0$;
3. $4y'' + 24y' + 37y = 0$ con $y(\pi) = 1$ y $y'(\pi) = 0$;
4. $y'' + 14y' + 49y = 0$ con $y(-4) = -1$ y $y'(-4) = 5$.

R **Wronskiano e independencia lineal.** Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones con $n-1$ primeras derivadas. Si el Wronskiano de dicho conjunto de funciones no resultara idénticamente nulo, luego el conjunto de funciones es linealmente independiente.

Ejercicio G.2 — Dejá vu: llevando a lo que sabemos resolver. De aquí para allá entre EDOs de primer y segundo orden.

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$, resuelva como lo hizo en el Ejercicio G.1. Luego elija una de las soluciones que encontró y averigue nuevamente su compañera pero ahora aplicando el *método de reducción del orden*. Pruebe que ambas soluciones forman una base de soluciones, haciendo uso del Wronskiano.

2. ¿Cómo deben ser las entradas de la matriz de un sistema de EDOs de primer orden, para que represente una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes

constantes? Demuestre. ¿Cómo serían las matrices asociadas a sistemas de primer orden que representen las EDOs de segundo orden brindadas en el Ejercicio G.1?

G.1.2 Diagonalización: sistemas lineales

Problema G.2 — La linealidad, nuestro caballito de batalla. Primero clasificaremos diferentes sistemas lineales, entendiendo los variados comportamientos que estos sistemas nos enseñan, para luego poder aplicarlos para entender comportamientos en sistemas no lineales.

Ejercicio G.3 Resuelva los PVI, explicitando la matriz fundamental, y grafique las soluciones identificando la dirección de los autovectores. Reinterprete como un análisis de estabilidad del origen y consecuentemente clasifique.

1. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.
4. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$ con $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio G.4 — El amor en tiempos de números. Tenemos una pareja: Julieta y Romeo, y como toda pareja, su amor está pintado con bemoles. Considere que $J(t)$ describe el amor(+)/odio(-) que siente Julieta por Romeo a tiempo t y $R(t)$, el amor(+)/odio(-) que siente Romeo por Julieta también a tiempo t, y que sus relaciones están descriptas por las constantes $a, b > 0$. Entonces, comente en cada una de las siguientes situaciones, cuáles deben ser las condiciones iniciales, si estas existen, para que terminen juntos y felices por siempre ($t \to \infty$).

- Situación 1. Suponga que cuanto más le demuestra su amor Romeo a Julieta, ella tiene más ganas de salir corriendo. En cambio, cuando Romeo se muestra indiferente, a Julieta le invade una extraña atracción por él. Con Romeo, la situación es inversa: se siente atraído a Julieta cuando ella le demuestra todo su amor por él, e indiferente cuando no. Matemáticamente:

$$\begin{matrix} R'(t) \\ J'(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}.$$

- Situación 2. Tanto Julieta como Romeo son muy cautos, tuvieron problemas en relaciones anteriores y no quieren salir lastimados nuevamente. En otras palabras, Julieta expresa su amor hacia Romeo sólo cuando ve que este hace lo propio con ella, y lo mismo él. Pero ambos mantienen distancia, si no observan señales de interés por parte del otro. Matemáticamente:

$$\begin{matrix} R'(t) \\ J'(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}.$$

- Situación 3. Polos opuestos. Julieta y Romeo reaccionan en forma opuesta tanto frente a los sentimientos propios, como frente a los sentimientos del otro, lo que plantea dos situaciones para la pareja. Matemáticamente:

$$\begin{matrix} R'(t) \\ J'(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} \text{ ó bien } \begin{matrix} R'(t) \\ J'(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}.$$

■

G.1.3 Linealización: sistemas no lineales

Problema G.3 — Linealizando la no linealidad de la naturaleza. Usando lo aprendido para sistemas lineales, aplicaremos dichos conceptos a problemas más realistas, i.e. con cierto grado de no linealidad.

Ejercicio G.5 — Casos robustos de linealización. Encuentre todos los puntos fijos del sistema:

$$\begin{cases} x' &= -x + x^3 \\ y' &= -2y, \end{cases}$$

usando el mecanismo de linealización para clasificarlos. Luego confirme su clasificación analizando el sistema no lineal completo, para ello ha de notar que el sistema está compuesto por dos ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas.

■

Ejercicio G.6 — Casos no robustos de linealización. Considere el sistema:

$$\begin{cases} x' &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ y' &= x + ay(x^2 + y^2), \end{cases}$$

con a un parámetro. Muestre que el sistema linealizado predice incorrectamente que el origen es un *centro* para todos los valores posibles de a, cuando en realidad el origen es una *espiral estable* para valores $a < 0$ o una *espiral inestable* para $a > 0$[a]

■

[a] Ayuda: note que el término $x^2 + y^2$ sugiere un cambio de variables a polares al analizar el sistema no lineal completo.

Ejercicio G.7 — Modelo de Lotka–Volterra. Suponga que tiene conejos y ovejas compitiendo por comida en la misma extensión de pasto. Tome en cuenta el hecho que cada especie, de no mediar agentes externos o competir por el alimento con la otra especie, llegaría a una población máxima (o capacidad de carga) que pudiera subsistir con los recursos actuales. Ahora, cuando la otra especie entra en juego, ya habrá que modelar las interacciones entre ambas, pues las dos pelean por el mismo alimento. Un modelo que intenta rescatar todas estas caracterśticas del escenario dinámico es:

$$\begin{cases} x' &= x(3-x-2y) \\ y' &= y(2-x-y), \end{cases}$$

con $x(t)$ la población de conejos y $y(t)$ la de ovejas. Explique cada término en función de lo mencionado más arriba, sin tomar tanto en cuenta los valores de los parámetros en sí, sino su magnitud relativa. Finalmente, analice la dinámica del sistema, y demuestre el *principio de exclusión competitiva* bajo el cual dos especies peleando por el mismo recurso limitado, no pueden coexistir.

Ejercicio G.8 — El péndulo simple: paradigma de los sistemas no lineales. Estudie el retrato de fases de la ecuación diferencial:

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0,$$

que representa el comportamiento de un péndulo. Para ello:

1. Introduzca la frecuencia $\omega = \sqrt{g/L}$ y el tiempo adimensional $\tau = \omega t$ para que la ecuación diferencial sea más sencilla de tratar.
2. Transforme la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden.
3. Identifique y clasifique los puntos fijos a través del mecanismo de linealización.[a]
4. Determine si su análisis son robustos.
5. Grafique el espacio de fases e identifique las zonas de libración y rotación, además de los puntos fijos.

[a] Note que la linealización en el punto de estabilidad se corresponde con la aproximación física del régimen de pequeñas oscilaciones.

Y luego de ver un poco el zoológico que imponen los comportamientos no lineales, y qué tanto podemos aprender de estos a través de su linealización, volvemos a donde nuestra teoría es más fuerte, a nuestras queridas ecuaciones lineales.

G.1.4 Inhomogéneas de segundo orden

Problema G.4 — Buscando soluciones particulares. Encuentre las soluciones generales de las siguientes EDOs con término independiente no nulo.

Ejercicio G.9 Resuelva haciendo uso del *método de coeficientes indeterminados*:

- $y'' - 4y' - 12y = g(t)$, con $g(t) = \sin(2t)$ y $g(t) = 2t^3 - t + 3$;

Resuelva haciendo uso del *método de variación de parámetros*:

- $2y'' + 18y = 6\tan(3t)$;
- $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} + e^{2t}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.