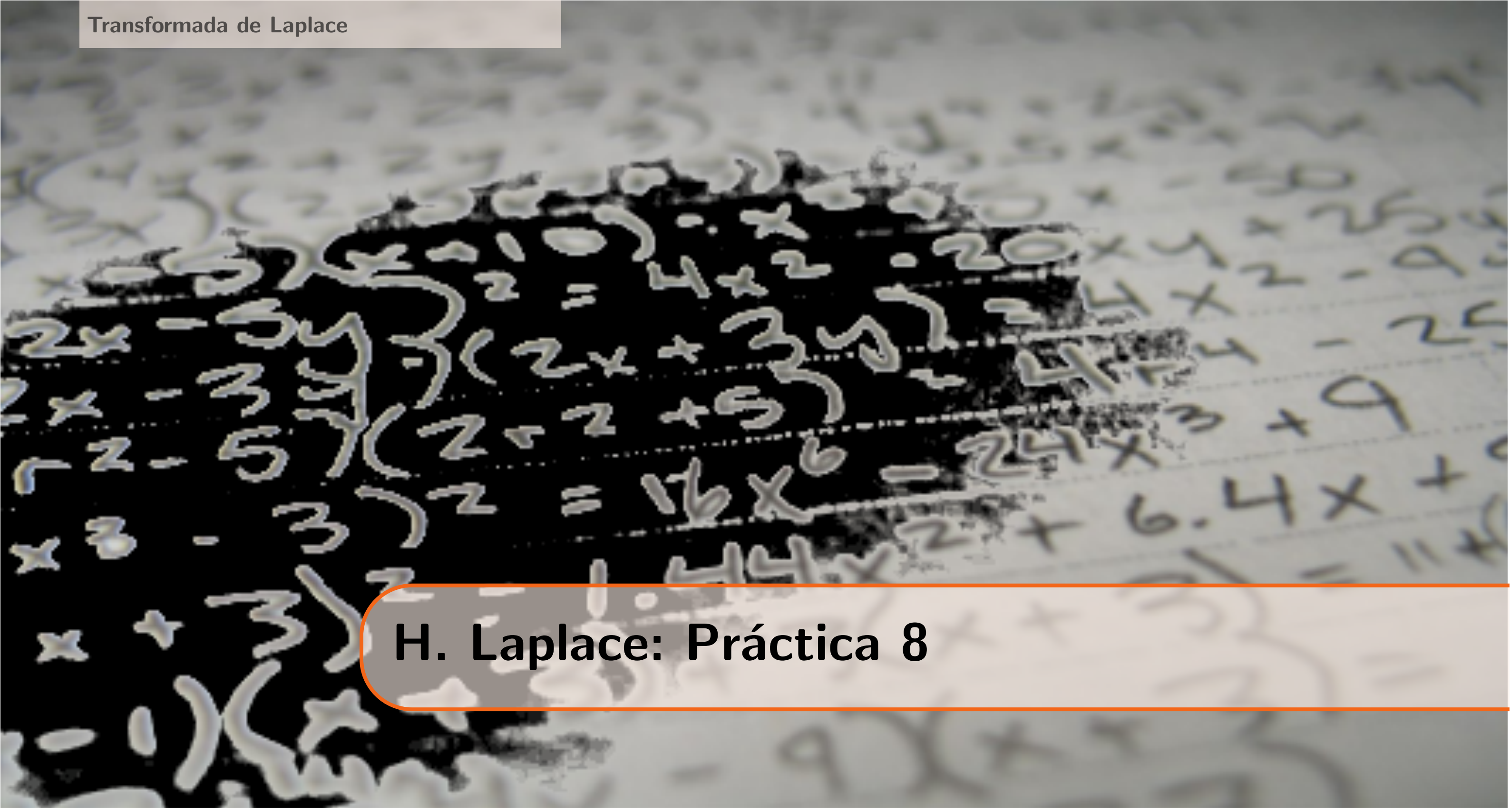

# H. Laplace: Práctica 8

## H.1 Transformada de Laplace

**Definición H.1.1** Suponga que $f(t)$ es una función continua a trozos. La transformada de Laplace de $f(t)$ estará definida por:

$$\mathbb{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) dt.$$

**R** **Algunos resultados útiles.** Si queremos representar el corrimiento de una función $f(t)$ en $c$ unidades, escribimos a la función corrida como $g(t) = u_c(t) f(t-c)$, donde $u_c(t)$, la función de Heaviside, está definida por:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < c, \\ 1 & \text{si } t \geq c. \end{cases}$$

Luego, la transformada de Laplace será: $\mathbb{L}[u_c(t) f(t-c)] = \mathrm{e}^{-cs} F(s)$, donde $F(s)$ es $\mathbb{L}[f]$. Finalmente, dada la propiedad de la delta de Dirac:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\delta(t-a)dt = f(a), \text{ con } \varepsilon > 0,$$

podemos encontrar fácilmente su transformada de Laplace como: $\mathbb{L}[\delta(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}$.

**Problema H.1** — **Familiarizándonos con la transformada.** Veremos algunos ejercicios de aplicación de la *Transformada de Laplace* que nos permitirán resolver EDOs a coeficientes constantes con inhomogeneidades particulares[1].

[1] Tenga en cuenta que la aplicación de dicha transformada sobre EDOs homogéneas o incluso sobre ciertas inhomogeneidades puede ser mucho más complicada que resolverlas por los métodos ya introducidos, es por esta razón que nos focalizaremos en ciertas inhomogeneidades donde la transformada simplifica las operaciones, aunque no serán todos los casos.

**Ejercicio H.1 — Familiarizándonos un poco con las inhomogeneidades.** Haga uso de las propiedades de la transformada, puede utilizar tablas:

1. Transforme: $f(t) = \mathrm{e}^{3t} + \cos(6t) - \mathrm{e}^{3t}\cos(6t)$.
2. Transforme: $f(t) = t\cosh(3t)$.
3. Transforme: $f(t) = (10t)^{3/2}$.
4. Transforme $f(t)$, donde:
$$f(t) = \begin{cases} t^4 & \text{si } t < 5, \\ t^4 + 3\sin(t/10 - 1/2) & \text{si } t \geq 5. \end{cases}$$
5. Anti–transforme: $F(s) = \frac{6s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+25}$.
6. Anti–transforme: $F(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}$.
7. Anti–transforme: $F(s) = \frac{25}{s^3(s^2+4s+5)}$.
8. Anti–transforme: $F(s) = \frac{s\mathrm{e}^{-4s}}{(3s+2)(s-2)}$ (haga uso de la función de Heaviside correspondiente).

■

**Ejercicio H.2 — Ahora vayamos a lo que nos trajo hasta acá.** Haciendo uso de la transformada de la derivada, resuelva los siguientes PVI[a]:

1. $y'' - 6y' + 15y = 2\sin(3t)$ con $y(0) = -1$ y $y'(0) = -4$;
2. $y'' - y' = \cos(2t) + \cos(2t - 12)u_6(t)$ con $y(0) = -4$ y $y'(0) = 0$;
3. $y'' + 2y' - 15y = 6\delta(t-9)$ con $y(0) = -5$ y $y'(0) = 7$ donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

■

[a]Note que si bien las condiciones iniciales están dadas en el origen, podrían estar dadas en cualquier punto. En estos casos, previamente a la aplicación de la transformada habría que hacer un cambio de variable para llevar dicha condición al origen.