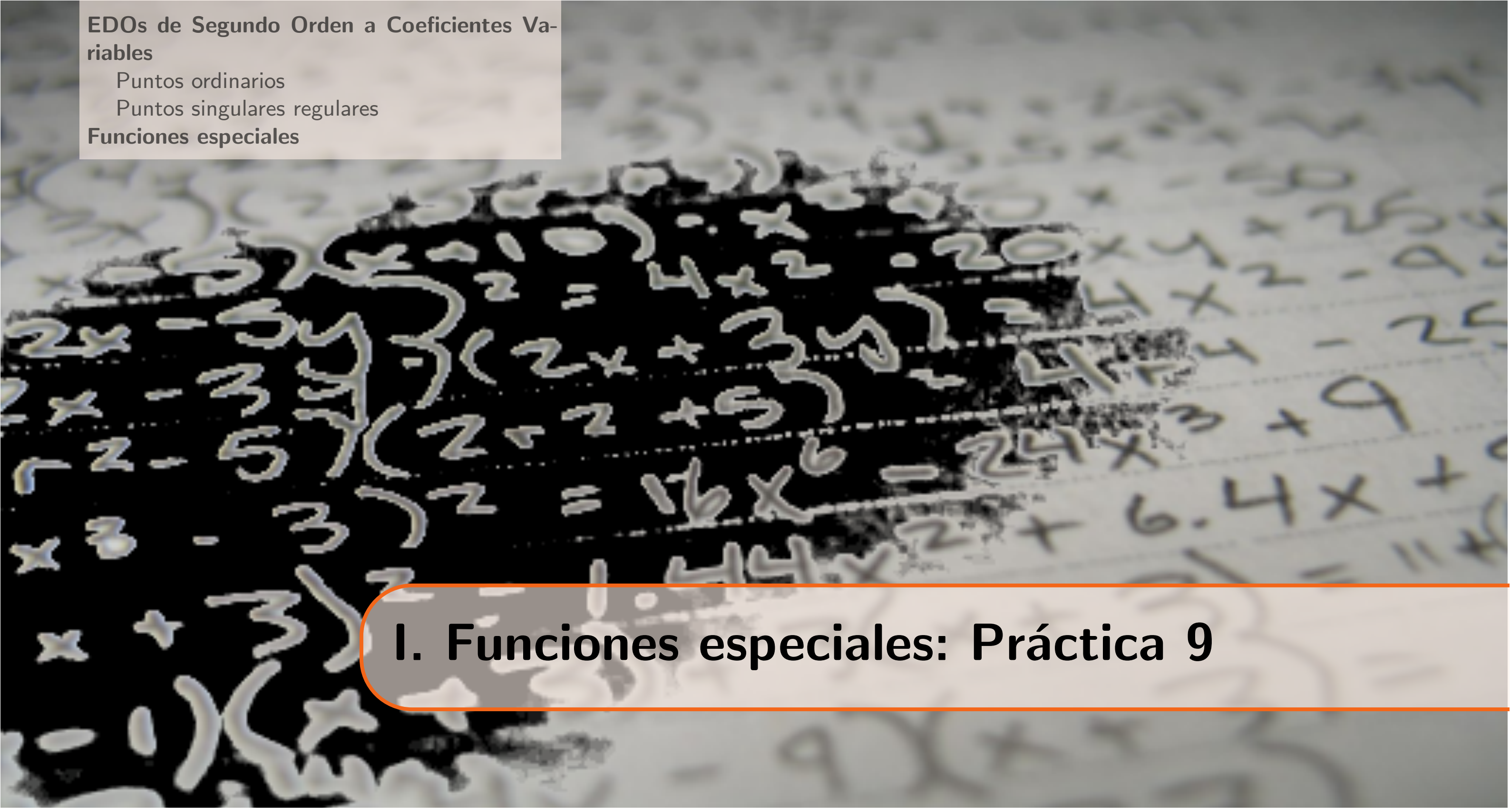

I. Funciones especiales: Práctica 9

I.1 EDOs de Segundo Orden a Coeficientes Variables

I.1.1 Puntos ordinarios

Problema I.1

Ejercicio I.1 — Convergencia total. Un par de ejemplos.

1. Encuentre los primeros 4 términos de cada serie de la solución alrededor de $x_0 = -2$ para la ecuación diferencial: $y'' - xy = 0$.

2. Resuelva la ecuación de Hermite y explicite cuándo tiene soluciones polinómicas (polinomios de Hermite): $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ con $n \in \mathbb{N}$.

■

Ejercicio I.2 — Regiones de convergencia. Resuelva la ecuación de Legendre, demuestre que la solución general está compuesta por una serie infinta (funciones de Legendre de segunda especie) y un polinomio de grado ℓ (polinomios de Legendre), y determine las regiones de convergencia de las soluciones: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0$ con $\ell \in \mathbb{N}$. ■

I.1.2 Puntos singulares regulares

Problema I.2 — Ecuación de Euler. El paradigma de las ecuaciones con puntos singulares regulares.

Ejercicio I.3 — Un viejo conocido. A partir del *método de reducción del orden*, encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler.

1. $2t^2y'' + ty' - 3y = 0$ con $y_1(t) = t^{-1}$ una de sus soluciones;

2. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$ con $y_1(t) = t$ una de sus soluciones.

■

Ejercicio I.4 Identifique el tipo de raíces y escriba la solución general a las siguientes ecuaciones de Euler, en caso de ser un PVI explicite los valores de las constantes (tome $x > 0$):

1. $2x^2y'' + 3xy' - 15y = 0$ con $y(1) = 0$ y $y'(1) = 1$;
2. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$;
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Problema I.3 — Volvamos a las series. Corrobore que $x_0 = 0$ es un punto singular regular y aplique un ansatz tipo series de potencias alrededor de él para encontrar las soluciones.

Ejercicio I.5 — Ecuación de Laguerre. Resuelva la ecuación de Laguerre y explicite cuándo tiene soluciones polinómicas (polinomios de Laguerre): $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio I.6 — Método de Frobenius. Encuentre la solución general para $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$.

I.2 Funciones especiales

Ahora vamos a tratar con ciertas funciones especiales de suma importancia en problemas de aplicación física, como lo son los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel. Para ello meteremos mano en la ecuación de Laplace, la que resolveremos en dos sistemas diferentes: en coordenadas esféricas (donde aparecerán los polinomios de Legendre) y en coordenadas cilíndricas (donde aparecerán las funciones de Bessel).

R Como no hemos visto aún ecuaciones diferenciales parciales (EDP), haremos de este problema sobre la ecuación de Laplace una guía donde se le pedirá que resuelva sólo lo que sabe resolver. De esta manera, podrá observar la complejidad en la cual se sumergen problemas más realistas.

Problema I.4 — Legendre y Bessel. Sea la ecuación de Laplace en 3D:

$$\nabla^2 V = 0.$$

Ejercicio I.7 — Resuelva la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Para empezar, estamos tratando con una EDP, dado que la función V depende de tres variables, una que denota la parte radial r y otras dos la parte angular θ, ϕ de la solución. Entonces, el primer paso es llevar esta ecuación en derivadas parciales al terreno que nosotros sabemos manejar: el de las EDOs. Para ello se aplica el método de **separación de**

variables, el cual propone modelar a la solución $V(r,\theta,\phi)$ como un producto de funciones de una variable, en este caso: $V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$.

- **Parte azimutal.** Remplace el modelo $V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ de solución en la EDP y divida todos los términos por V. Identifique el factor que sólo depende de θ y haga uso de una constante de separación $\lambda = -m^2$, i.e.: puede mover a todas las funciones que dependen de (R,ϕ) de un lado de la igualdad, y de esta manera, del otro lado de la igualdad quedarán automáticamente las funciones que dependen sólo de θ. Para satisfacer la igualdad, ambos miembros deben ser (obviamente) iguales y, como dependen de variables distintas, sólo se satisface la igualdad si ambos son iguales a una constante. Esta constante es la que usamos como constante de separación λ. De esta manera, le quedarán dos ecuaciones diferenciales, una de ellas que depende sólo de θ:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

  por lo que es una EDO que ya sabe cómo resolver (resuelva), y otra que dependerá de (R,ϕ), por lo que no deja de ser una EDP, pero ahora de dos variables y no de tres.

- **Parte radial** Aplique el procedimiento anterior para esta última EDP, i.e.: separe las funciones que dependen sólo de r de las que dependen de ϕ, use la constante de separación $\ell(\ell+1)$ y compruebe que la dependencia con la parte radial se puede escribir de la siguiente manera:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} = \ell(\ell+1)R.$$

  Esta es una EDO a coeficientes variables, homogénea, con una forma particular de los coeficientes que a esta altura debería reconocer. Resuelva utilizando:

  1. el método de Frobenius,

  2. identifique la ecuación (prestando atención a la forma de los coeficientes) y resuelva con un cambio de variables apropiado.

  Luego de resolver las anteriores EDOs para encontrar la dependencia funcional de la solución tanto con θ como con r, sólo falta la dependencia funcional de la solución con ϕ para obtener la solución completa del problema.

- **Parte polar.** La dependencia de la solución con ϕ, está dada por la EDO:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}\frac{d\Phi}{d\phi} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\phi)}\right]\Phi = 0, \tag{I.1}$$

  denominada **ecuación diferencial asociada de Legendre** y que tiene por soluciones las funciones $P_\ell^m(\cos(\phi))$. Compruebe que la Ec. I.1 se reduce a la ecuación de Legendre (ver Ej. I.2; que tiene por soluciones a los P_ℓ), al tomar simetría azimutal en el problema[a].

Una vez encontradas las funciones $R(r)$, $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$, escriba la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, e identifique la parte de la solución correspondiente a los **armónicos esféricos**. ■

[a] Haga uso del cambio de variables $\cos(\phi) = x$.

Ejercicio I.8 — Resuelva la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Aplique el método de separación de variables visto en el ejercicio anterior, utilizando primero λ y luego κ como constantes de separación, para encontrar la expresión:

$$\frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} - r^2\lambda = \kappa, \tag{I.2}$$

correspondiente a la EDO que regula la dependencia radial de la solución.

- **Parte en z.** Primero resuelva la EDO correspondiente a la dependencia en z:

  $$\frac{d^2Z}{dz^2} + z\lambda = 0,$$

  separando en casos, i.e.: $\lambda \leq 0 \to \lambda = -\gamma^2$ y $\lambda > 0 \to \lambda = \gamma^2$.

- **Parte azimutal.** Observe que la EDO que regula la parte azimutal es análoga a la que regula la parte en z (a diferencia de la anterior, esta solución debe ser 2π periódica), luego, recuerde separar en casos, i.e. $\kappa \leq 0 \to \kappa = -\nu^2$ y $\kappa > 0 \to \kappa = \nu^2$ y resuelva. Indique los valores que puede tomar ν.

- **Parte radial.** Tome los casos $\lambda \leq 0 \to \lambda = -\gamma^2$ y $\kappa > 0 \to \kappa = \nu^2$ y sustituya en la Ec. I.2. Realice el cambio de escala: $x = \gamma r$ y obtenga la expresión:

  $$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2)R = 0,$$

  conocida como **ecuación de Bessel de orden ν**, que es una EDO a coeficientes variables con $x = 0$ un punto singular regular (compruebe). Aplique el método de Frobenius y resuelva. Reescriba las soluciones utilizando la función Γ[a]. Finalmente, señale qué ecuación obtendría para el caso $\lambda > 0 \to \lambda = \gamma^2$ y especifique cómo se llaman sus soluciones.

■

[a] Haga uso de la propiedad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y reescriba a_0 como $a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$.