

Matemáticas Avanzadas 2016 Ecuaciones Diferenciales Clase 3

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Laplace

Definiciones y Propiedades

- Transformaciones Integrales
- Definición de Transformada de Laplace
- Ejemplos
- Funciones de Orden Exponencial
- Propiedades
- Función de Heaviside o escalón $\mu_{t_0}(t)$
- Función Gamma $\Gamma(x)$

Transformaciones Integrales

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 3

Octavio
Miloni

Definición. *Transformación Integral.* Dada una función $f(t)$, y una función de dos variables $K(s, t)$, la operación

$$\int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

define una transformación integral de $f(t)$, esto es

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

En particular, vamos a considerar transformaciones integrales de la forma

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} K(s, t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t) f(t) dt$$

cuando la integral sea convergente

Transformada de Laplace

Definición. Sea $f(t)$ definida en la recta real positiva. La Transformada de Laplace de $f(t)$ está definida como

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

siempre y cuando la integral sea convergente

Ejemplos



$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$



$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$



$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$



$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Funciones de Orden Exponencial

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 3

Octavio
Miloni

Definición. Una función f es de orden exponencial si existen constantes positivas α , M y T tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \text{para } t \geq T$$

Ejemplos



$$|t| \leq e^t$$



$$|a t + b| \leq |a| |t| + |b| \leq (|a| + |b|) e^t$$



$$|A \cos(\omega t)| \leq |A| e^t$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Las funciones de orden exponencial tienen transformada de

Propiedades de la Transformada de Laplace

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

- Linealidad:

$$\mathcal{L}[\lambda f + g] = \lambda F(s) + G(s)$$

- Teorema de Traslación en el eje s:

$$\mathcal{L}[f(t) e^{at}] = F(s - a)$$

- Transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0) \quad \text{Soporte para aplicar a PVI}$$

- Transformada de una derivada n -ésima:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Derivada n -ésima de una Transformada:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Función de Heaviside o *escalón*

Definición. La función escalón o de Heaviside está definida como

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un **encendido abrupto** en $t = t_0$

Notemos además que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un **apagado abrupto** en $t = t_0$

Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t) f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

Función $\Gamma(x)$

La función $\Gamma(x)$ está definida, para $x > 0$, a través de

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Integrando por partes, podemos demostrar que

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

Entonces, como $\Gamma(1) = 1$ tenemos que para x es natural,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Propiedades

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma''(x) > 0$. (Donde tiene aprox. su mínimo? Graficar para ver)
- $\Gamma(p) = s^{p+1} \mathcal{L}[t^p]$, $\forall p > -1, p \in \mathbb{R}$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)