Matemáticas Avanzadas 2016 Ecuaciones Diferenciales Clase 5

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Clase Número 5

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

- Definiciones. Sistemas Lineales
- Caso Homogéneo. Espacio de Soluciones
- Matriz Fundamental
- Propagador
- Caso Coeficientes Constantes
- Forma Diagonal y de Jordan

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es de la forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\vec{x} + \mathbf{F}(t)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}[t]$ y $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^{n}[t]$. o, en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Por el Teorema de Picard, si $\mathbf{A}(t)$ tiene componentes continuas habrá solución. Por qué?

Si

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Decimos que el sistema lineal es *homogéneo*

Existencia de solución para el caso homogéneo

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Definiendo el operador lineal

$$L = \frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t)$$

el núcleo

$$\left[\frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t)\right]\vec{x} = \vec{0}$$

tiene dimensión n.

Observaciones

Sea $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}[t]$. Dado el operador

$$L = \frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t)$$

- Este operador está definido en $\mathbb{R}^n[t]$
- Si $\mathbf{A}(t)$ está compuesta por $n \times n$ funciones continuas, exite una única solución al PVI asociado

$$\frac{d}{dt}\vec{x} - \mathbf{A}(t)\vec{x} = \vec{0}, \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

  en un entorno de t_0 (Teorema de Picard)
- Aplica a **componentes**, **no coordenadas**

Dimensión del Núcleo

Consideremos n vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, base canónica de $\mathbb{R}^n$. En esta base, cualquier vector de $\mathbb{R}^n[t]$ podrá escribirse (en componentes) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ En general, si tomamos n vectores $\vec{v}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$ tendremos $\vec{v}_\ell(t) = \begin{pmatrix} v_{\ell\,1}(t) \\ v_{\ell\,2}(t) \\ \vdots \\ v_{\ell\,n}(t) \end{pmatrix}$ Ahora supongamos que los $\vec{v}_\ell$ satisfacen el PVI

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_\ell - \mathbf{A}(t)\vec{v}_\ell = \vec{0}, \qquad \vec{v}_\ell(t_0) = \mathbf{e}_\ell$$

Aprovechando esta imposición, si $\vec{x}(t)$ es solución del PVI, tendremos que

$$\vec{x}(t_0) = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda^\ell \, \mathbf{e}_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda^\ell \, \vec{v}_\ell(t_0)$$

Entonces, tendremos

$$\vec{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda^\ell \, \vec{v}_\ell(t)$$

y linealmente independientes! (demostrar)

Trabajando en Coordenadas: Matriz Fundamental

Trabajando en coordenadas, la solución general puede escribirse como un producto de matrices:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & \cdots & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t)\vec{\lambda}$$

donde

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ x_1^2(t) \\ \vdots \\ x_1^n(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2^1(t) \\ x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_2^n(t) \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad , \vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^1(t) \\ x_n^2(t) \\ \vdots \\ x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

Es decir, se encolumnan los vectores generadores de la solución general. A la matriz $\mathbf{U}(t)$ se la denomina *matriz fundamental*. EL determinante de la matriz fundamental se lo denomina *Wronskiano*

El Propagador

si la condición inicial es $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, entonces, tendremos

$$\vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x^1(t_0) \\ x^2(t_0) \\ \vdots \\ x^n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t_0) & x_2^1(t_0) & \cdots & x_n^1(t_0) \\ x_1^2(t_0) & x_2^2(t_0) & \cdots & x_n^2(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n(t_0) & x_2^n(t_0) & \cdots & x_n^n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t_0)\vec{\lambda}$$

Como el Wronskiano es distinto de cero, la matriz fundamental admite inversa, por lo que

$$\vec{\lambda} = [\mathbf{U}(t_0)]^{-1}\,\vec{x}_0$$

Entonces, la solución del problema de valor inicial

$$\vec{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t_0)\vec{x}_0 = \boldsymbol{\Psi}(t, t_0)\vec{x}_0$$

Donde $\boldsymbol{\Psi}(t, t_0)$ es el denominado *propagador* del sistema. Este propagador actúa sobre el espacio de condiciones iniciales representando la evolución temporal.
El propagador satisface la ecuación diferencial con la condición inicial $\boldsymbol{\Psi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$

Sistemas con coeficientes constantes

Consideremos el Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\vec{x} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

con **A** una matriz de componentes constantes.
Aplicando Picard:

- $\vec{x}^{(0)}(t) = \vec{x}_0$
- $\vec{x}^{(1)}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{x}^{(0)}\, dt' = \vec{x}_0 + \mathbf{A}\,(t - t_0)\,\vec{x}_0 = [\mathbf{I} + \mathbf{A}\,(t - t_0)]\,\vec{x}_0$
- $\vec{x}^{(2)}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{x}^{(1)}\, dt' = \left\{\mathbf{I} + \mathbf{A}\,(t - t_0) + \frac{[\mathbf{A}\,(t-t_0)]^2}{2!}\right\}\vec{x}_0$
- $\vdots$
- $\vec{x}^{(n)}(t) = \left\{\sum_{\ell=0}^{n} \frac{[\mathbf{A}\,(t-t_0)]^\ell}{\ell!}\right\}\vec{x}_0$

Entonces, tomando límite tenemos, formalmente

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\vec{x}_0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{\Psi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

A matriz!

Caso Diagonalizable

Si la matriz $\mathbf{A}$ llegara a ser diagonalizable, existirá la matriz $\mathbf{P}$ con inversa tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$. Entonces, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}$ Notemos además que

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\,\mathbf{D}^n\,\mathbf{P}^{-1}$$

Entonces,

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2\,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3\,t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n\,t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

Los λ_j no precisan ser todos distintos.

Forma de Jordan

En el caso en que la matriz fundamental no sea diagonalizable, apelamos a las formas de Jordan.
- Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ los autovalores distintos de la matriz.
- Llamemos n_k a la multiplicidad geométrica de λ_k
En este caso, la matriz fundamental puede escribirse como

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}$$

Donde para cada bloque de Jordan $k \times k$ se tiene

$$e^{\mathbf{J}_k t} = e^{(\mathbf{D}_k + \mathbf{N}_k)t} = e^{\lambda_k\, t}\left\{\mathbf{I} + \mathbf{N}_k\, t + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^3}{3!} + \cdots + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^{n_k - 1}}{(n_k - 1)!}\right\}$$

donde k es la multiplicidad geométrica del autovalor

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase*, http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Ava/pdfs/Apuntes-MA2015.pdf
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) http://sedici.unlp.edu.ar (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)