Matemáticas Avanzadas 2016 Ecuaciones Diferenciales Clase 7

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Clase Número 7

Método de Frobenius

- Método de Frobenius
- Construcción de Soluciones
  - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia no entera
  - Ecuación Indicial con raíces iguales
  - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia entera
- Punto en el Infinito

Método de Frobenius

Consideremos ahora, una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\,y''(x) + Q(x)\,y'(x) + R(x)\,y(x) \;=\; 0$$

Si x_0 es un punto singular regular. Dividiendo a ambos miembros por $P(x)$ y multiplicando a ambos miembros por x^2 obtenemos

$$x^2\,y''(x) + x^2\,\frac{Q(x)}{P(x)}\,y'(x) + x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\,y(x) = 0$$

o equivalentemente

$$x^2\,y''(x) + x\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right]\,y'(x) + \left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right]\,y(x) = 0$$

Como x_0 es un punto singular regular, $\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right]$ y $\left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right]$ son analíticas, por lo que tenemos para ambas funciones desarrollo de Taylor

Desarrollos

Para las funciones entre corchetes tenemos series de Taylor convergentes alrededor de $x=0$,

$$\begin{aligned}\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right] &= \alpha_0+\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\alpha_3\,x^3+\cdots\\ \left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right] &= \beta_0+\beta_1\,x+\beta_2\,x^2+\beta_3\,x^3+\cdots\end{aligned}$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación diferencial, tenemos

$$x^2\,y''(x)+x\,\left[\alpha_0+\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\cdots\right]y'(x)+\left[\beta_0+\beta_1\,x+\beta_2\,x^2+\cdots\right]y(x)=0$$

distribuyendo el primer término

$$x^2\,y''(x)+\alpha_0\,x\,y'(x)+x\,\left[\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\cdots\right]y'(x)+\beta_0\,y(x)+\left[\,\beta_1\,x+\beta_2\,x^2+\cdots\right]y(x)=0$$

Reagrupando, tenemos

$$\underbrace{x^2\,y''(x)+\alpha_0\,x\,y'(x)+\beta_0\,y(x)}_{Euler}+\left[\alpha_1\,x+\alpha_2\,x^2+\cdots\right]\,y'(x)+\left[\,\beta_1\,x+\beta_2\,x^2+\cdots\right]\,y(x)=0$$

Método de Frobenius. Propuesta de Solución

El hecho de que un primer término sea la ecuación de Euler, sugiere y motiva a buscar soluciones en serie para la ecuación diferencial (ahora, la completa) en la forma

$$y(x) = x^r \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, x^\ell$$

donde r sea solución de la ecuación indicial $r^2 + (\alpha_0 - 1)\, r + \beta_0$

Casos Posibles. Soluciones Generales

Caso $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

$$y(x) = \lambda_1 \, x^{r_1} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)} \, x^\ell \right] + \lambda_2 \, x^{r_2} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_2)} \, x^\ell \right]$$

donde los coeficientes $c_\ell^{(r_{1,2})}$ se obtienen a partir de la expresión, para $c_0^{(r_{1,2})} = 1$

$$c_\ell^{(r_{1,2})} = -\frac{1}{p(\ell + r_{1,2})} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}^{(r_{1,2})} \, \left[\alpha_j \, (\ell + r_{1,2} - j) + \beta_j \right], \qquad \text{p es el polinomio indicial} \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

Método de Frobenius. Propuesta de Solución

Caso $r_1 = r_2$
Para este caso, notemos primero que
$L[y_r(x)] = p(r)\, x^r = (r - r_1)^2\, x^r$ Con lo cual, tendremos que

$$L\left[\frac{\partial y_r(r)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=r_1} = 0$$

Entonces, la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = x^{r_1}\left\{\ln|x|\left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)}\, x^\ell\right] + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{dc_\ell^{(r_1)}}{dr_1}\right\}$$

Caso $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

$$y(x) = y_{r_2}(x)\,[\lambda_2 + \lambda_1\, \ln|x|] + x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^\ell$$

con λ_1 y λ_2 constantes arbitrarias.
Este caso requiere un análisis minucioso respecto a los coeficientes (ver Miloni, 2015)

Punto en el infinito

Estudiemos la ecuación diferencial

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

pero en la variable $\zeta = \frac{1}{x}$
Para que el punto en el infinito sea un punto singular regular, es equivalente a que $\zeta = 0$. La condición será que

$$\frac{1}{\overline{P}(\zeta)} \left[\frac{2}{\zeta^2}\, \overline{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\, \overline{Q}(\zeta) \right] \quad y \quad \frac{1}{\zeta^2} \frac{\overline{R}(\zeta)}{\overline{P}(\zeta)}$$

sean analíticas en $\zeta = 0$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* . http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf. (2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)