

Matemáticas Avanzadas 2016 Ecuaciones Diferenciales Clase 8

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Clase 8

Series de Fourier

Aspectos Algebraicos

- Espacios de Dimensión finita. Coeficientes de Fourier.
- Dimensión Infinita. Convergencia en Media
- Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval
- Ejemplos de Series de Fourier

Espacios Euclídeos. Coeficientes de Fourier

Sea V un espacio euclídeo de dimensión n .

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortogonal de V . Entonces, para $\vec{v} \in V$ tenemos

$$\vec{v} = \alpha^\ell \mathbf{e}_\ell \quad \text{sumando en } \ell \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Multiplicando a ambos miembros por \mathbf{e}_k tenemos

$$\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle = \langle \alpha^\ell \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle = \alpha^\ell \langle \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle$$

Como la base es ortogonal, tenemos que $\langle \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle = \|\mathbf{e}_k\|^2 \delta_{\ell k}$, entonces

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} \mathbf{e}_k \quad \text{sumando en } k \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Lo que significa que $\frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$ son las coordenadas de \vec{v} en la base ortogonal. Estas coordenadas se las denominan **coeficientes de Fourier** de \vec{v} .

Subespacios. Aproximaciones

Problema: Consideremos un espacio euclídeo V de dimensión n . Sea $\vec{v} \in V$ y sea W un subespacio de V de dimensión m . La pregunta es: Cuál es el vector $\vec{w} \in W$ "más parecido" a \vec{v} ?

Respuesta:

$$\vec{w} = \sum_{\ell=1}^m \langle \vec{v} | \mathbf{e}_\ell \rangle \mathbf{e}_\ell$$

Pistas

- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ una base ortonormal de W
- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormal de V ($n > m$)
- El vector que mejor se aproxima ($\|\vec{v} - \vec{w}\|$ mínimo) será aquel que cumpla (graficar)

$$(\vec{v} - \vec{w}) \perp \vec{w}$$

Espacios de Dimensión Infinita

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

Octavio
Miloni

1. Dado un espacio $W \subset V$ un subespacio V . Sea $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ una base ortogonal de W . Demostrar que dado $\vec{v} \in V$,

$$\left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^m \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \mathbf{e}_i \right\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

para todo $\vec{w} \in W$

2. *Convergencia en Media.* La serie formal $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ se dice que *converge en media* a \vec{v} si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \right\| = 0$$

3. Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ converge en media a un vector \vec{v} , entonces $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle}$.

Pista: Partir de la desigualdad del punto **1.** y la convergencia en media de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ a \vec{v}

Desigualdad de Bessel

Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ un conjunto ortonormal de vectores en el espacio euclídeo V , de dimensión infinita. Sea $\vec{v} \in V$. Entonces

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2$$

que es la desigualdad denominada desigualdad de Bessel.

Pista: Partir de

$$0 \leq \left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_i \right\|^2$$

desarrollar el cuadrado (como el producto interno del vector diferencia por sí mismo), comprobando que

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_i \right) \mid \left(\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_j \right) \right\rangle = \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle^2$$

Igualdad de Parseval

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

Octavio
Miloni

Igualdad de Parseval. Asumiendo que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ es una base ortonormal de V , demostrar que se cumple

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{v}\|^2$$

Pista para la demostración: Como se supone que es una base, la serie formal converge en media

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \vec{v} - \sum_{\ell=1}^n \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_\ell \right\|^2 = 0$$

y hacer un razonamiento análogo al hecho en el punto anterior.

Ejercicio. Escribir la Desigualdad de Bessel y la Igualdad de Parseval en el caso que las bases sean ortogonales, no ortonormales.

La Serie de Fourier

1. Considerar en el espacio de funciones continuas a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

2. Demostrar que el conjunto $\{1; \cos(x), \cos(2x), \dots; \sin(x), \sin(2x), \dots\}$ que se denota

$$\{1; \cos(\ell x); \sin(\ell x)\}_{\ell=1,2,3,\dots}$$

es ortogonal.

3. Dada una función continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) = a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} \cos(\ell x) + b_{\ell} \sin(\ell x)]$$

Un Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier de la función es,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right\}$$

Aplicando la Igualdad de Parseval, se obtiene

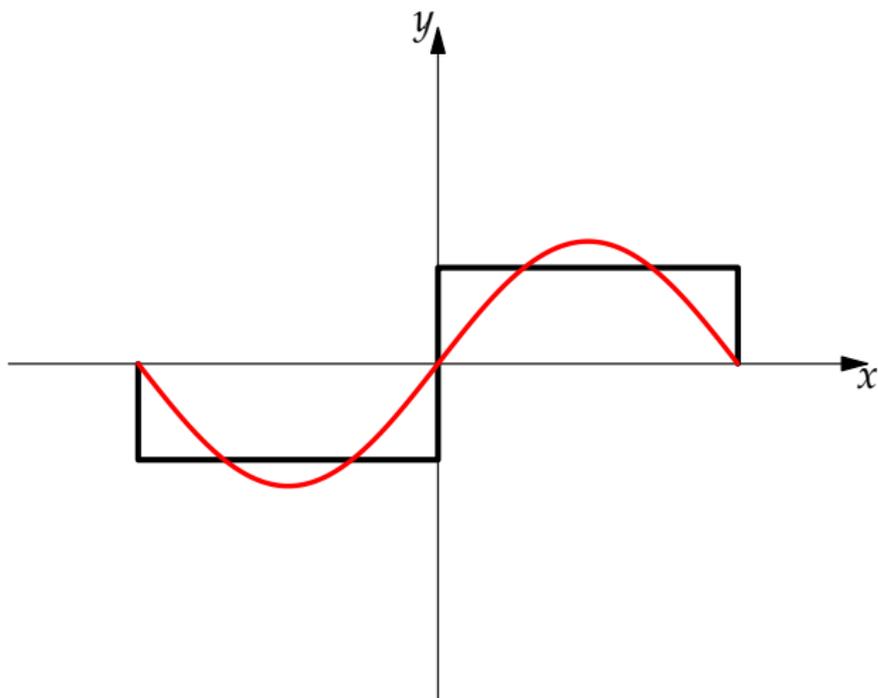
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \dots = \frac{\pi}{8}$$

Con Fourier obtenemos propiedades aritméticas!

$$n = 1$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

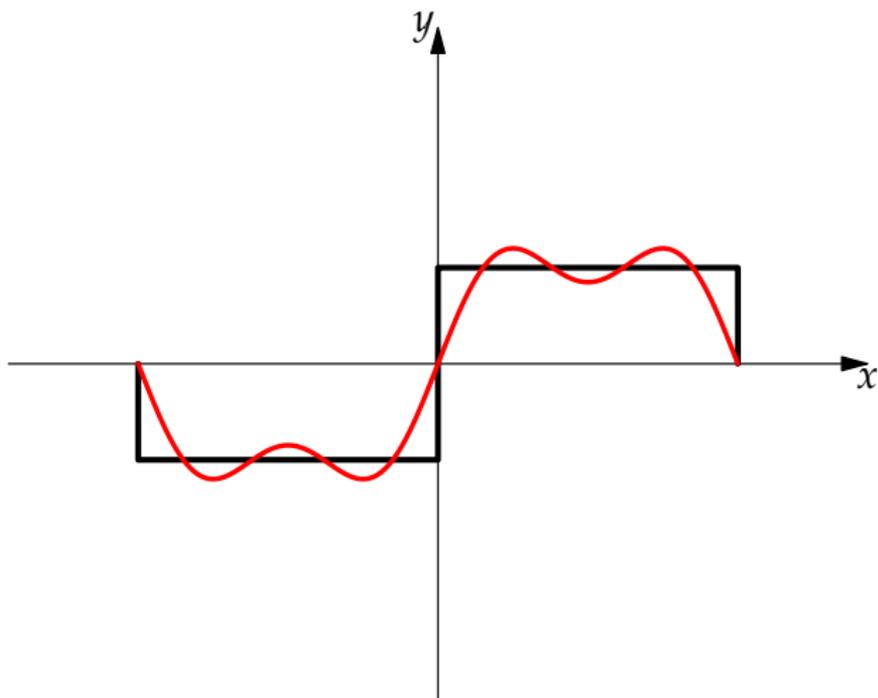
Octavio
Miloni



$$n = 3$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

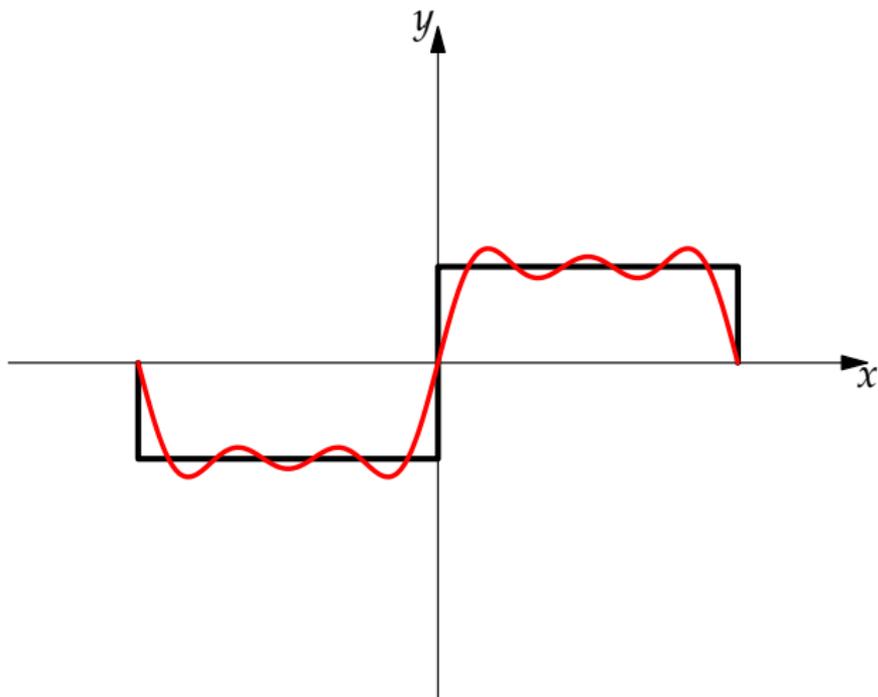
Octavio
Miloni



$$n = 5$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

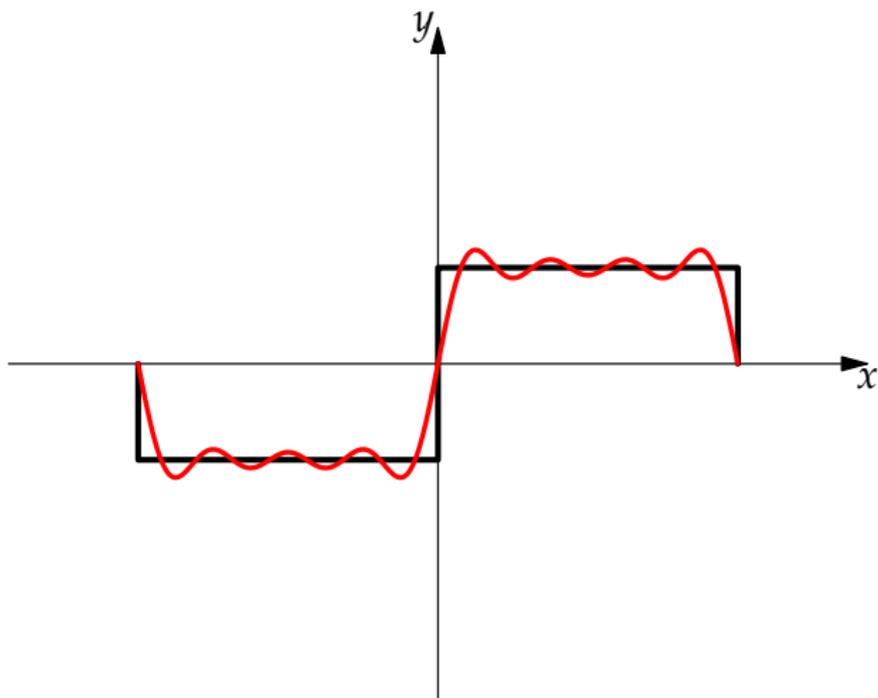
Octavio
Miloni



$$n = 7$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

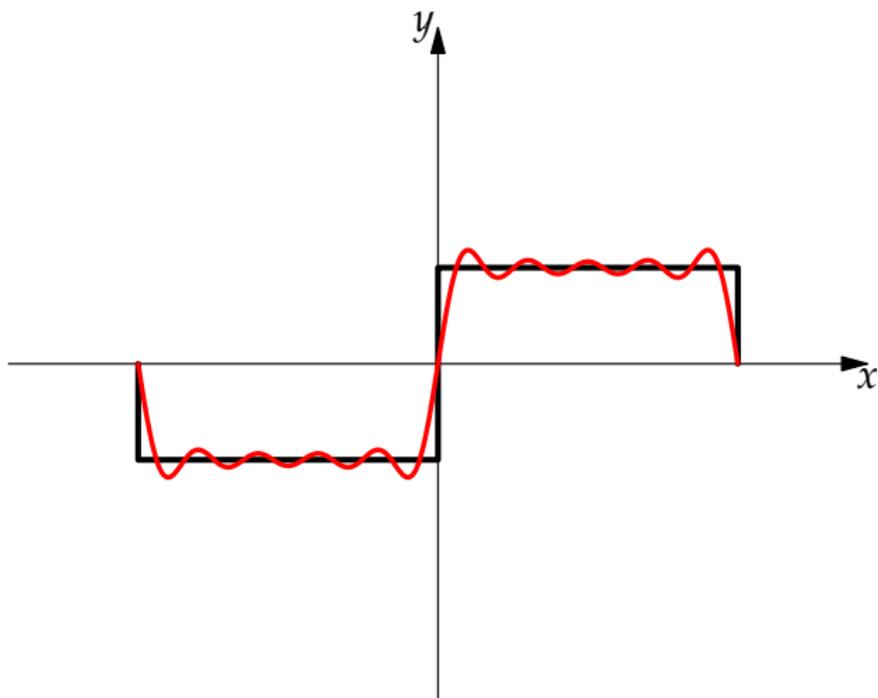
Octavio
Miloni



$$n = 9$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

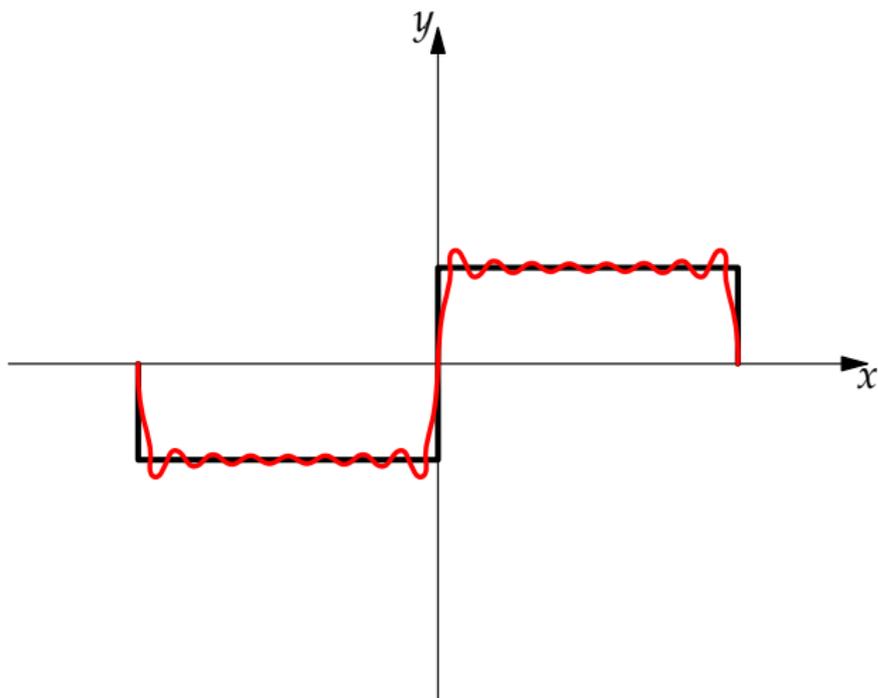
Octavio
Miloni



$$n = 15$$

Matemáticas
Avanzadas
2016
Ecuaciones
Diferenciales
Clase 8

Octavio
Miloni



Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve. *Ecuaciones Diferenciales en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Sommerfeld, Arnold. *Partial Differential Equations in Physics*, Ed. Academic Press (1949)