Matemáticas Avanzadas 2016 Ecuaciones Diferenciales Clase 9

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Clase 9

Series de Fourier Convergencia Puntual

- Teorema de Riemann-Lebesgue
- Sumas Parciales
- Teoremas de Fourier

Teorema de Riemann-Lebesgue

En esta clase, el soporte analítico lo provee el *Teorema de Riemann-Lebesgue* el cual será aplicado en todos los teoremas de convergencia puntual de las **series de Fourier**
Vayamos al enunciado

Teorema. Riemann-Lebesgue. *Sea $f(x)$ una función continua a trozos en el intervalo $[a, b]$. Entonces se cumple:*

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\,\sin(k\,x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\,\cos(k\,x)\,dx = 0$$

El Teorema nos garantiza que si una función $f(x)$ cumple con las condiciones del Teorema

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\,\sin(k\,x + r)\,dx = 0$$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue

Vamos a demostrar que el límite de la integral con el $\sin(kx)$, ya que la demostración es análoga para el otro límite.
Ya que la función $f(x)$ es continua a trozos, podemos subdividir el intervalo $[a, b]$ en subitervalos en los cuales la función es continua. Entonces, basta con considerar el límite

$$\lim_{k\to\infty} \int_p^q f(x)\,\sin(k\,x)\,dx$$

donde $[p, q]$ es uno de los subintervalos de continuidad de $f(x)$
Asimismo, dividamos la integral en n subintervalos equiespaciados $p = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = q$ con lo que podemos expresar

$$\int_p^q f(x)\,\sin(k\,x)\,dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} f(x)\,\sin(k\,x)\,dx$$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue *continuación*

La integral

$$\int_p^q f(x)\,\sin(k\,x)\,dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} f(x)\,\sin(k\,x)\,dx$$

la podemos escribir también como

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \left\{ f(x_\ell) \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \sin(k\,x)\,dx + \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} [f(x) - f(x_\ell)]\,\sin(k\,x)\,dx \right\}$$

Tenemos que la primera integral es de integración inmediata $f(x_\ell)\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \sin(k\,x)\,dx = -f(x_\ell)\frac{\cos(x_{\ell+1})-\cos(x_\ell)}{k}$
Para la segunda integral, podemos ver que la misma está acotada por el valor absoluto de $|f(x) - f(x_\ell)|$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue *continuación*

Entonces, tenemos que el valor absoluto lo podemos acotar

$$\left|\int_p^q f(x)\,\sin(k\,x)\,dx\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} |f(x_\ell)| \left|\frac{\cos(x_{\ell+1})-\cos(x_\ell)}{k}\right| + \sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} |f(x)-f(x_\ell)|dx$$

Si M es el máximo de la función en el intervalo $[p,q]$ podemos acotar:

- $$\sum_{\ell=0}^{n-1} |f(x_\ell)| \left|\frac{\cos(x_{\ell+1})-\cos(x_\ell)}{k}\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2\,M}{k} = \frac{2\,M\,n}{k}$$
- Como f es continua en cada subintervalo, tenemos $|f(x)-f(x_\ell)|<\varepsilon$ siempre que $|x-x_\ell|<\delta$. Entonces

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} |f(x)-f(x_\ell)|dx < \varepsilon\,(q-p)$$

Si ahora definimos $\varepsilon' = 2\varepsilon\,(q-p)$ y para un valor fijo n elegimos un k suficiente grande de manera tal que $\frac{2\,M\,n}{k} < \frac{\varepsilon'}{2}$ tenemos que probamos el teorema.

Los Teoremas de Fourier

Los denominados **Teoremas de Fourier** son los resultados que garantizan la convergencia puntual de las Series de Fourier en los diferentes escenarios para la función a desarrollar, $f(x)$:

- La función $f(x)$ es continua y derivable en todo el intervalo
- La función $f(x)$ es continua pero no derivable en un conjunto finito de puntos del intervalo
- La función $f(x)$ es discontinua en un número finito de puntos del intervalo

Preparación. Sumas Parciales

Consideremos una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ la sumas parciales de Fourier son

$$S_n = a_0 + \sum_{\ell=1}^{n} [a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)]$$

donde, escribiendo la expresión para los coeficientes, tenemos

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{\ell=0}^{n} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\ell\ t) dt \right] \cos(\ell x) + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\ell\ t) dt \right] \sin(\ell x) \right\}$$

Regrupando podemos escribir

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(t-x)\, dt$$

con

$$K_n(t-x) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \cos[\ell(t-x)]$$

Propiedades de la función $K_n(t-x)$

De la definición de la función

$$K_n(t-x) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \cos[\ell(t-x)]$$

podemos demostrar las siguientes propiedades

- $$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\,dt = \pi$$
- $$K_n(t-x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}$$

La primera propiedad es inmediata a partir de la definición. Para demostrar la segunda, notemos que

$$\sin\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right] - \sin\left[\left(\ell-\frac{1}{2}\right)(t-x)\right] = 2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]\cos(\ell\,(t-x))$$

Entonces,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt$$

Caso I: Funciones Continuas y Derivables

La suma parcial es

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt$$

En el integrando sumemos y restemos $f(x)$, en la forma:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-f(x)+f(x)]\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt$$

La integral la podemos dividir como

$$S_n(x) = \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt}_{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)dt=\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-f(x)]\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-f(x)]\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}{\frac{1}{2}(t-x)}}\,dt$$

Aplicando Riemann-Lebesgue en la primera integral (discutirlo), obtenemos $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$

Caso II: Funciones Continuas y no Derivables

Escribamos nuevamente la expresión de la suma parcial para un punto de discontinuidad de la derivada, x_0,

$$S_n(x_0) = \frac{f(x_0)}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x_0)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x_0)\right]}\,dt}_{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x_0)dt=\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-f(x_0)]\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x_0)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x_0)\right]}\,dt$$

Vamos a pedir que si bien la función no es derivable en algunos puntos, sí posee límites laterales para la derivada, es decir,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'^{(+)}(x_0)$$

y lo propio para $f'^{(-)}(x_0)$

Entonces, si en la segunda integral de la suma parcial dividimos la integración según los puntos de discontinuidad de la derivada y teniendo en cuenta que existen los límites laterales podemos aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue, por lo que $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$ en cualquier punto de discontinuidad de la derivada.

Caso III: Funciones con discontinuidades

Consideremos x_0 un punto de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma parcial nuevamente será

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x_0)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x_0)\right]}\, dt$$

y dividamos la integral en el punto de discontinuidad

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0} f(t)\, K_n(t-x_0)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\pi} f(t)\, K_n(t-x_0)\, dt$$

Calculemos la primera integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0} f(t)\, K_n(t-x_0)\, dt = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0-\varepsilon} f(t)\, K_n(t-x_0)\, dt}_{\to 0 \quad n \to \infty \quad (Riemann-Lebesgue)} + \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \left[f(t) - f(x_0^-) + f(x_0^-)\right] K_n(t-x_0)\, dt$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \left[f(t) - f(x_0^-) + f(x_0^-)\right] K_n(t-x_0)\, dt = \frac{f(x_0^-)}{2}$$

usando que $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} K_n(t-x_0)\, dt = \frac{\pi}{2}$

Caso III: Funciones con discontinuidades. *Continuación*

De manera análoga, tenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x_0)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\left[f(t) - f(x_0^+) + f(x_0^+)\right]\,K_n(t-x_0)\,dt + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{x_0+\varepsilon}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x_0)\,dt}_{\to 0 \quad n\to\infty \quad (Riemann-Lebesgue)}$$

Resultando

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x_0)\,dt = \frac{f(x_0^+)}{2}$$

Entonces, sumando las dos integrales obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^-)}{2} + \frac{f(x_0^+)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Lo que indica que en los puntos de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio del salto de la discontinuidad

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve. *Ecuaciones Diferenciales en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)