Matemáticas Avanzadas 2016 Clase Nro 3 28-03-2016

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Espacio Dual

Ejemplo 1

Considerar la base dual para $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^3\}$ definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{dx}^1(x,y,z) &= 2x - y + z \\ \mathbf{dx}^2(x,y,z) &= x - 2y + 3z \\ \mathbf{dx}^3(x,y,z) &= -x + y - z \end{aligned}$$

Hallar

a) La base de $\mathbb{R}^3$

b) Las coordenadas del vector $(6, 7, 8)$

c) Las coordenadas de la funcional lineal $f(x,y,z) = x + y + z$

Cambio de base y coordenadas

Consideremos un cambio de base en el espacio vectorial V. Esto implica que tenemos un cambio definido a través de la relación

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda^\mu_\nu \, \mathbf{e}_\mu$$

Ahora, dado un elemento de V^* este se representa de manera invariante

$$f_\mu \, \mathbf{dx}^\mu = f'_\nu \, \mathbf{dx}'^\nu$$

Aplicando a ambos miembros la funcional a un vector $\vec{v} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = x'^\beta \mathbf{e}'_\beta$, se obtiene

$$f'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \, f_\nu \quad \text{cambio de coord. de funcionales}$$

y para el cambio de base se puede obtener

$$\mathbf{dx}'^\mu = [\Lambda^{-1}]^\mu_\nu \, \mathbf{dx}^\nu$$

Resumen de cambio de base y coordenadas

Espacio	Base	Coordenadas
Espacio V	$\mathbf{e}'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\mathbf{e}_{\nu}$	$x'^{\mu} = \left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Espacio V^*	$\mathbf{dx}'^{\mu} = \left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu}_{\nu} \mathbf{dx}^{\nu}$	$f'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} f_{\nu}$

Recordar que la representación con subíndices y supraíndice tenemos

- El supraíndice indica fila
- El subíndice indica columna

Covarianza y contravarianza

Coordenadas Contravariantes

Hemos visto que un vector lo denotamos

$$\vec{v} = x^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu}$$

las coordenadas x^{μ} las denominamos coordenadas *contravariantes* y aparecen siempre en los supraíndices.

Coordenadas Covariantes

Las funcionales lineales, elementos del espacio dual las denotamos

$$f = f_{\mu}\,\mathbf{dx}^{\mu}$$

las coordenadas f_{μ} las denominamos coordenadas *covariantes* y aparecen siempre en los subíndices.

El gradiente de un campo escalar

Consideremos una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0)
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$.
Por definición de diferenciabilidad, en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ se puede escribir

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(P)\, u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\, u_y + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\, u_z}_{df(P)} + \varepsilon ||\vec{u}||$$

Entonces, la diferencial

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\, u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\, u_y + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\, u_z$$

es un funcional lineal, cuyas componentes $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(P)$ es el gradiente de la función.

Formas bilineales

Una forma bilineal sobre un espacio V es una aplicación $F : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que cumple

- $f(\vec{u}; \lambda \cdot \vec{v_1} + \vec{v_2}) = \lambda f(\vec{u}; \vec{v_1}) + f(\vec{u}; \vec{v_2})$
- $f(\lambda \cdot \vec{u_1} + \vec{u_2}; \vec{v}) = \lambda f(\vec{u_1}; \vec{v}) + f(\vec{u_2}; \vec{v})$

Observación

Podemos notar que, dado un espacio vectorial V y su dual V^* una forma bilineal puede ser obtenida de la siguiente manera: Sean f y g dos elementos del espacio dual V^*. Entonces,

$$F(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{u}) \cdot g(\vec{v})$$

(donde notemos que el producto se realiza en $\mathbb{R}$) es una forma bilineal.

Ejemplo

Consideremos, como ejemplo, la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$

$$F(\vec{u};\vec{v}) = 2u_x\,v_x - 4\,u_x\,v_y + u_y\,v_x - 2\,u_y\,v_y$$

puede escribirse como

$$F(\vec{u};\vec{v}) = f(\vec{u})\cdot g(\vec{v})$$

donde

$$f(\vec{u}) = 2\,u_x + u_y, \qquad g(\vec{v}) = v_x - 2\,v_y$$

Veamos que esto no es una particularidad, sino que cualquier forma bilineal puede ser escrita como "producto" de dos 1-formas. El encomillado viene de que lo que se ve como producto es la aplicación en los vectores, pero no sabemos que es producto de 1-formas.

Formas Multilineales

La extensión de una forma bilineal a una multilineal es elemental: Una forma multilineal sobre V es una aplicación $F : V \times V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ que se puede explicitar como

$$F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$$

lineal en cada argumento.
Más aún, una forma de construir una forma $m-$lineal es a partir de m elementos del espacio dual, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ y definir

$$F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m) = f_1(\vec{v}_1) \cdot f_2(\vec{v}_2) \cdots f_m(\vec{v}_m)$$