Matemáticas Avanzadas 2016 Clase Nro 4 04-04-2016

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Producto Tensorial de 1-formas

Construcción del producto tensorial

Como vimos, una forma bilineal puede ser obtenida como el producto en $\mathbb{R}$ de dos formas lineales, esto es,

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = f_1(\vec{v}) f_2(\vec{w})$$

Esta simple situación nos permite definir el *producto tensorial de 1-formas*:

Definición. Producto tensorial

Dadas dos 1-formas, $f_1, f_2 : V \to \mathbb{R}$, vamos a definir el producto tensorial $f_1 \otimes f_2$ definido como

$$(f_1 \otimes f_2)(\vec{v}, \vec{w}) = f_1(\vec{v}) f_2(\vec{w})$$

El espacio $V^* \otimes V^*$

Al notar que el producto tensorial de dos 1-formas sobre el espacio V es una forma bilineal, vamos a definir el espacio

$$V^* \otimes V^* = \{f \otimes g, \quad f, g \in V^*\}$$

Este espacio es el de todas las formas bilineales sobre un espacio V.

Observación

Con las operaciones

- $[f_1 \otimes g_1 \oplus f_2 \otimes g_2](\vec{v}, \vec{w}) = f_1 \otimes g_1(\vec{v}, \vec{w}) + f_2 \otimes g_2(\vec{v}, \vec{w})$
- $[\lambda \cdot f \otimes g(\vec{v}, \vec{w})] = \lambda [f \otimes g](\vec{v}, \vec{w})$

Es un espacio vectorial. Es el espacio $V^* \otimes V^*$

Elementos de $V^* \otimes V^*$. Los elementos de este espacio son *tensores* de tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bases y coordenadas de $V^* \otimes V^*$

Consideremos V al espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$. Sea $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{dx^1}, \mathbf{dx^2}, \ldots, \mathbf{dx^n}\}$ una base para V^*

La Base de $V^* \otimes V^*$

Notemos que los n^2 elementos

$$\{\mathbf{dx}^\mu \otimes \mathbf{dx}^\nu\}$$

forma una base para $V^* \otimes V^*$

Un elemento de $V^* \otimes V^*$ son los *tensores* de tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y en esta base se escribirán, entonces,

$$\mathbf{T} = T_{\mu\nu}\, \mathbf{dx}^\mu \otimes \mathbf{dx}^\nu, \quad \text{con } T_{\mu\nu} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$$

Ejemplo.

Hallar las coordenadas del tensor dos veces covariante $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in V^* \otimes V^*$ definido como

$$\mathbf{T} = f_1 \otimes f_2, \quad \text{con} \quad f_1(x,y) = 3x + 2y, \;\; f_2(x,y) = x - 4y$$

Solución. Para obtener las coordenadas, sólo debemos aplicar el tensor a los elementos de la base. Suponiendo que la base es la canónica, tendremos. $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 3$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -12$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 2$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -8$ Entonces,

$$\mathbf{T} = 3\mathbf{dx}^1 \otimes \mathbf{dx}^1 - 12\mathbf{dx}^1 \otimes \mathbf{dx}^2 + 2\mathbf{dx}^2 \otimes \mathbf{dx}^1 - 8\mathbf{dx}^2 \otimes \mathbf{dx}^2$$

Ejercicio: Escribir el tensor para la base de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \{(1,-1);(0,2)\}$

El espacio doble dual

Dado un espacio V, ya nos imaginamos cual es el dual, que será el espacio de las 1-formas o formas lineales o funcionales lineales.
Dado que V^* es a su vez un espacio vectorial, tiene sentido preguntarnos cómo será el dual de este espacio, es decir, el dual del dual. Este espacio es llamado *doble dual* y es denotado V^{**}
En el doble dual habrá funcionales lineales definidas sobre las funcionales lineales. Esto es más dificil de visualizar. Sin embargo, si definimos la aplicación

$$T : V^{**} \to V$$

Tal que $T(\mathcal{F}_\mu) = \mathbf{e}_\mu$ de manera tal de identificar al doble dual con el espacio V podemos definir entonces

$$\mathcal{F}_\mu(f) = f(\mathbf{e}_\mu)$$

La base de V^{**}

La base del doble dual

Con la identificación mencionada, una base para V^{**} es la propia base del espacio, donde

$$\mathbf{e}_\mu(\mathbf{dx}^\nu) = \mathbf{dx}^\nu(\mathbf{e}_\mu) = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

Tensores una vez contravariante

Notemos que un vector se escriba como

$$\vec{v} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$$

Entonces, puede ser llamado *tensor una vez contravariante* o del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tensores del tipo $\binom{0}{2}$ (dos veces contravariantes)

Definición

Los tensores del tipo $\binom{0}{2}$ serán formas bilineales sobre V^*, es decir

$$\mathbf{T} = V^* \times V^* \to \mathbb{R} \in V \otimes V$$

y tendrán la forma:

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu} \; \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Las coordenadas se pueden obtener como

$$T^{\mu\nu} = \mathbf{T}(\mathbf{dx}^\mu, \mathbf{dx}^\nu)$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ definido explícitamente $\mathbf{T} = (-1, 4) \otimes (2, 1)$
Hallar las coordenadas del mismo si la base del dual es $\{\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^2\}$ con $\mathbf{dx}^1(x, y) = 2x - y, \quad \mathbf{dx}^2(x, y) = -x + y$

Solución. Aplicando el tensor a cada elemento de la base dual tendremos las coordenadas.

$$T^{1\,1} = \mathbf{T}(\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^1) = (-1, 4) \otimes (2, 1)(\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^1) = \mathbf{dx}^1(-1, 4) \cdot \mathbf{dx}^1(2, 1) = (-6) \cdot 3 = -18$$

$$T^{1\,2} = \mathbf{T}(\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^2) = (-1, 4) \otimes (2, 1)(\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^2) = \mathbf{dx}^1(-1, 4) \cdot \mathbf{dx}^2(2, 1) = (-6) \cdot (-1) = 6$$

$$T^{2\,1} = \mathbf{T}(\mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^1) = (-1, 4) \otimes (2, 1)(\mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^1) = \mathbf{dx}^2(-1, 4) \cdot \mathbf{dx}^1(2, 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

$$T^{2\,2} = \mathbf{T}(\mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^2) = (-1, 4) \otimes (2, 1)(\mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^2) = \mathbf{dx}^2(-1, 4) \cdot \mathbf{dx}^2(2, 1) = 5 \cdot (-1) = -5$$

Entonces, la expresión del tensor como combinación de la base será:

$$\mathbf{T} = -18\,(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + 6\,(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + 15\,(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + (-5)\,(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)$$

Observación: La base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ no es la canónica! Hallarla