Matemáticas Avanzadas 2016
Clase Nro 5
06-04-2016

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Cambio de bases en tensores

Supongamos que en la base del espacio y del dual se efectuan los cambio de base

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda^\mu_\nu \, \mathbf{e}_\nu, \qquad \mathbf{dx}'^\mu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_\nu \, \mathbf{dx}^\nu$$

Y el consecuente cambio en las coordenadas de vectores y 1-formas

$$x'^\mu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_\nu \, x^\nu, \qquad f'_\nu = \Lambda^\mu_\nu \, f_\mu$$

Pregunta

Cómo quedará el cambio de coordenadas en tensores en general?

Tensores dos veces covariantes

Los tensores dos veces covariantes son objetos de la forma:

$$\mathbf{T} = T_{\mu\nu}\left(\mathbf{dx}^{\mu} \otimes \mathbf{dx}^{\nu}\right)$$

Y esta representación es invariante, lo que implica que se puede escribir

$$\mathbf{T} = T_{\mu\nu}\left(\mathbf{dx}^{\mu} \otimes \mathbf{dx}^{\nu}\right) = T'_{\alpha\beta}\left(\mathbf{dx}'^{\alpha} \otimes \mathbf{dx}'^{\beta}\right)$$

Dado un cambio de base (para el espacio y para el dual)

$$\mathbf{e}'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\,\mathbf{e}_{\nu}, \qquad \mathbf{dx}'^{\mu} = \left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu}_{\nu}\,\mathbf{dx}^{\nu}$$

Al reemplazar obtenemos

Cambio de coordenadas en un tensor dos veces covariante

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\,\Lambda^{\beta}_{\nu}\;T_{\alpha\beta}$$

Tensores dos veces contravariantes

Los tensores dos veces contravariantes son objetos de la forma:

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\left(\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu\right)$$

Y esta representación es invariante, lo que implica que se puede escribir

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\left(\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu\right) = T'^{\alpha\beta}\left(\mathbf{e}'_\alpha \otimes \mathbf{e}'_\beta\right)$$

Dado un cambio de base (para el espacio y para el dual)

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda^\mu_\nu\,\mathbf{e}_\nu, \qquad \mathbf{dx}'^\mu = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_\nu \mathbf{dx}^\nu$$

Al reemplazar obtenemos

Cambio de coordenadas en un tensor dos veces contravariante

$$T'^{\mu\nu} = \left[\Lambda^{-1}\right]^\mu_\alpha \left[\Lambda^{-1}\right]^\nu_\beta\, T^{\alpha\beta}$$

Tensores una vez covariante y una vez contravariante

Definición

Los tensores una vez covariante y una vez contravariante, o del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son objetos

$$\mathbf{T} = V \times V^* \to \mathbb{R} \in V^* \otimes V, \qquad \text{bilineal}$$

Cuya representación invariante es

$$\mathbf{T} = T^{\mu}_{\nu} \left(\mathbf{dx}^{\nu} \otimes \mathbf{e}_{\mu} \right)$$

Cambio de coordenadas

De manera análoga a los casos anteriores, obtenemos

$$T'^{\mu}_{\nu} = \left[\Lambda^{-1} \right]^{\mu}_{\alpha} \ \Lambda^{\beta}_{\nu} \ T^{\alpha}_{\beta}$$

Tensores del tipo $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Con las ideas que ya hemos desarrollado, consideremos una forma $(p+q)$-lineal que tome p elementos de V, q elementos de V^* y que le asigne un elemento de $\mathbb{R}$
Esto es

$$\mathbf{T} : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p-veces} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q-veces} \to \mathbb{R}$$

Representación

Como combinación de la base del espacio $\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-veces} \times \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-veces}$ estos objetos se escriben

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p} (\mathbf{dx}^{\nu_1} \otimes \mathbf{dx}^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{dx}^{\nu_p} \otimes \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_q})$$

Cambio de coordenadas

Cambio de coordenadas para tensores en general

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p} = \Lambda^{\alpha_1}_{\nu_1}\Lambda^{\alpha_2}_{\nu_2}\cdots\Lambda^{\alpha_p}_{\nu_p}\left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu_1}_{\beta_1}\left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu_2}_{\beta_2}\cdots\left[\Lambda^{-1}\right]^{\mu_q}_{\beta_q} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$$

Regla mnemotécnica para el cambio de coordenadas

Supongamos un tensor del tipo $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, es decir, $p-$veces covariante y $q-$veces contravariante

- Por cada índice covariante $[\ ]_{\mu_\ell}$ el cambio contiene un múltiplo $\Lambda^{\beta_\ell}_{\mu_\ell}$
- Por cada índice contravariante $[\ ]^{\nu_s}$ el cambio contiene un múltiplo $[\Lambda^{-1}]^{\nu_s}_{\alpha_s}$

Ejemplo de cambio de coordenadas

Ejemplo

Consideremos un tensor del tipo $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2*}\to\mathbb{R}$, en la base para V, $\{(-1,1);(0,-1)\}$ y su correspondiente dual tiene por coordenadas $T^1_1=5,\;\; T^1_2=2,\;\; T^2_1=1,\;\; T^2_2=3,$
Hallar las coordenadas del tensor si la base para V es $\{(1,0);(1,1)\}$
Respuesta. Con las bases nuevas y viejas, podemos encontrar la matriz $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & -2\end{bmatrix}$. con su inversa $\mathbf{\Lambda}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$
tenemos todo lo necesario para obtener las nuevas coordenadas del tensor $T'^{\mu}_{\nu}=[\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{\nu}T^{\alpha}_{\beta}, \qquad \alpha,\beta,\mu,\nu=1,2$
Recordar: Superíndice son filas y subíndices, columnas (para las matrices $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{\Lambda}^{-1}$)