# Matemáticas Avanzadas 2016 Clase Nro 8

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Hasta ahora, los cambios de coordenadas -inducidos por un cambio de base- estaban definidos de manera lineal, es decir, en la forma

$$x'^{\alpha} = \Psi^{\alpha}_{\beta}\, x^{\beta} = \Psi^{\alpha}_{1}\, x^{1} + \Psi^{\alpha}_{2}\, x^{2} + \cdots + \Psi^{\alpha}_{n}\, x^{n}$$

Donde $\Psi^{\alpha}_{\beta}$ es una matriz en la que $\alpha$ indica fila y $\beta$, columna.

**Cambios de coordenadas no lineales**

Consideremos ahora, cambios de coordenadas generales, no necesariamente lineales

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{1}, x^{2}, \ldots, x^{n}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

# Linealización. Cambios locales.

Si consideramos que las funciones que definen el cambio de coordenadas son diferenciables, podemos considerar que en cada punto tendremos

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \Psi^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta}$$

Más aún, si consideramos el punto como un origen, podemos considerar que localmente tenemos

$$x'^{\alpha} \approx \Psi^{\alpha}_{\beta}\, x^{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} x^{\beta}$$

Ahora, con esta linealización, podemos notar que un cambio no lineal también induce, localmente, un cambio de base.

# Ejemplo: Coordenadas polares



Efectuemos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

La linealización, será, entonces

$$\begin{aligned} dx &= \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)\,d\theta \\ dy &= \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

Entonces, localmente y en un entorno del punto de la linealización (considerado como el origen), podemos escribir

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta)\,r - r\sin(\theta)\,\theta \\ y &= \sin(\theta)\,r + r\cos(\theta)\,\theta \end{aligned}$$

Notemos que este cambio es el de las "viejas" como función de las "nuevas"

# Coordenadas polares. Continuación



Con la linealización, entonces, tendremos que la matriz de cambio de base, $\mathbf{\Lambda}$, será

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\,\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\,\cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} \end{bmatrix}$$

Estas son las matrices necesarias para analizar los cambios de coordenadas para vectores, 1-formas, y tensores en general.

**El tensor métrico**

En las coordenadas polares, las coordenadas del tensor métrico serán

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\,\Lambda^{\beta}_{\nu}\,g_{\alpha\beta}$$

Y como en cartesianas y en el producto interno canónico la métrica es diagonal, tendremos $\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$

# Derivadas de vectores base



El hecho de que la base de un espacio vectorial dependa de la posición (como en el caso de cambio de coordenadas nolineales) produce que las bases de los espacios ya no sean constantes. Este aspecto es novedoso y a partir de ahora tendrá sentido la expresión $\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha}$.
Como vamos a imponer que la dervación sea parte del espacio local (llamado espacio tangente) la derivada debe poder ser escrita como compbinación de los elementos de la base, por tal motivo, se definen los *Símbolos de Christoffel*, $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$, de manera tal de que

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\mu$$

Los cuales se pueden obtener a partir de la métrica

$$\Gamma^\alpha_{\mu\,\nu} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right]$$

# Derivada covariante de un vector contravariante



Consideremos un vector contravariante $\vec{v} = v^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu}$
Calculando la derivada parcial con respecto a $x^{\alpha}$, tendremos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial v^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\mathbf{e}_{\mu} + v^{\mu}\,\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$$

Agrupando índices convenientemente, podemos escribir

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\alpha}} = \underbrace{\left[\frac{\partial v^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} v^{\nu}\right]}_{\text{derivada covariante}} \mathbf{e}_{\mu}$$

**Notación:** Vamos a denotar $[\ ]_{,\alpha} = \frac{\partial [\ ]}{\partial x^{\alpha}}$ y para la derivada covariante se utiliza el ";" Entonces

$$v^{\mu}_{;\alpha} = v^{\mu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} v^{\nu}$$

# Derivada covariante de una 1-forma

Consideremos una 1-forma $f = f_\mu \, \mathbf{dx}^\mu$

Para calcular la derivada covariante de un vector covariante, es decir, calcular $f_{\mu;\nu}$ nos valdremos del hecho de que para cualquier vector contravariante, $\vec{v}$, $f(\vec{v})$ es un escalar. Además, como

$$f_\mu v^\mu \in \mathbb{R}, \qquad [f_\mu v^\mu]_{;\nu} = [f_\mu v^\mu]_{,\nu}$$

Calculando las derivadas a ambos miembros

$$f_{\mu;\nu} v^\mu + f_\mu v^\mu_{;\nu} = f_{\mu,\nu} v^\mu + f_\mu v^\mu_{,\nu}$$

aplicando la expresión de derivada covariante para $v^\mu$ y agrupando adecuadamente, se obtiene

$$f_{\mu;\nu} = f_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} f_\alpha$$

# Derivada covariante de Tensores



## Derivada de un tensor dos veces contravariante

Dado un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\, \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Al calcular la derivada parcial respecto a $x^\alpha$, aplicando la propiedad del producto, y el cálculo de la derivada covariante para coordenadas contravariantes, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^\alpha} = T^{\mu\nu}_{;\alpha} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

con

$$T^{\mu\nu}_{;\alpha} = T^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} T^{\mu\beta}$$

# Derivada covariante de Tensores

## Derivada de un tensor una vez covariante y una vez contravariante

Dado un tensor del tipo $\binom{1}{1}$

$$\mathbf{T} = T^{\mu}_{\nu}\, \mathbf{dx}^{\nu} \otimes \mathbf{e}_{\mu}$$

Al calcular la derivada parcial respecto a $x^{\alpha}$, aplicando la propiedad del producto, y el cálculo de la derivada covariante para coordenadas contravariantes, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^{\alpha}} = T^{\mu}_{\nu;\alpha} \mathbf{dx}^{\nu} \otimes \mathbf{e}_{\mu}$$

con

$$T^{\mu}_{\nu;\alpha} = T^{\mu}_{\nu,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\, T^{\beta}_{\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\, T^{\mu}_{\beta}$$

# Derivada covariante de Tensores. Caso general



Para el caso general, de un tensor del tipo $\binom{p}{q}$, las coordenadas serán $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}$

**Regla de derivación covariante**

- Por cada índice contravariante, se incorporan a $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p,\alpha}$

$$+\Gamma^{\mu_\ell}_{\beta\alpha}\, T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{\ell-1}\beta\mu_{\ell+1}\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}$$

- Por cada índice covariante, se incorporan a $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p,\alpha}$

$$-\Gamma^{\beta}_{\nu_\ell\alpha}\, T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{\ell-1}\beta\nu_{\ell+1}\ldots\nu_p}$$

# Ejemplo



**Tensor de tipo $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**

Con la regla para obtener la derivada covariante, tenemos

$$
\begin{aligned}
T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3;\alpha} &= T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3,\alpha} + \\
&+ \Gamma^{\mu_1}_{\beta\alpha} T^{\beta\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \Gamma^{\mu_2}_{\beta\alpha} T^{\mu_1\beta}_{\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&- \Gamma^{\beta}_{\nu_1\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\beta\nu_2\nu_3} - \Gamma^{\beta}_{\nu_2\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\beta\nu_3} - \Gamma^{\beta}_{\nu_3\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\beta}
\end{aligned}
$$