Matemáticas Avanzadas 2016 Clase Nro 9

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Productos "punto" entre tensores

Dados dos tensores del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$ vamos a definir operaciones producto, además de las que poseen por ser un espacio vectorial

Producto punto •

Definamos el producto punto entre elementos base:

$$(\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p}) \bullet (\mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_r}) \equiv \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \cdots \otimes \left(\langle \mathbf{e}_{\mu_p} | \mathbf{e}_{\nu_1} \rangle \right) \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_r}$$

Observación: El producto punto contrae dos índices, por lo que si multiplicamos dos tensores, uno del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$ y otro del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$, el producto será un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ q+r-2 \end{pmatrix}$
En el caso de vectores contravariantes -tensores del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$- el producto punto resulta un escalar.

Producto tensorial entre tensores

El producto tensorial se efectúa directamente multiplicando tensorialmente los elementos de la base

$$\left[\mathbf{dx}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{dx}^{\mu_p}\right] \otimes \left[\mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_q}\right] = \mathbf{dx}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{dx}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_q}$$

Y las combinaciones posibles

Restricciones para efectuar el producto

El producto tensorial sólo se puede definir entre

- Dos tensores del tipo $\binom{0}{q}$ y $\binom{0}{r}$.
- Dos tensores del tipo $\binom{p}{0}$ y $\binom{s}{0}$.
- Dos tensores del tipo $\binom{p}{0}$ y $\binom{r}{q}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: Consideremos los tensores

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta\gamma}\, \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma, \quad y \quad \mathbf{R} = R^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Entonces,

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{R} = \underbrace{T^{\alpha\beta\gamma} R^{\mu\nu}}_{\text{coordenadas del producto}} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Ejemplo 2: Consideremos ahora, los tensores

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta}\, \mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta, \quad y \quad \mathbf{R} = R^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Entonces, el producto se puede realizar

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{R} = \underbrace{T_{\alpha\beta} R^{\mu\nu}}_{\text{coordenadas del producto}} \mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$$

Operadores Diferenciales. El operador $\tilde{\nabla}$

A partir de la definición de los productos $\bullet$ y $\otimes$ entre tensores y junto con la definición de la derivada covariante, podemos extender los operadores diferenciales que se vieron en los cursos de *Análisis Vectorial*.

El operador $\tilde{\nabla}$

El operador $\tilde{\nabla}$, con el que se define el gradiente de una función en los cursos de análisis vectorial, será definido ahora como

$$\tilde{\nabla}[\ ] = [\ ]_{;\mu}\, \mathbf{dx}^{\mu}$$

Para el caso de una función escalar $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el operador aplicado a la función resulta en la 1-forma gradiente

$$\tilde{\nabla}[\phi] = [\phi]_{;\mu}\, \mathbf{dx}^{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\, \mathbf{dx}^{\mu}$$

Operadores Diferenciales. El operador $\vec{\nabla}$

Definido el operador $\tilde{\nabla}$, podemos definir el operador $\vec{\nabla}$ que comúnmente se utiliza en análisis vectorial

El operador $\vec{\nabla}$

El operador $\vec{\nabla}$, con el que se define el gradiente de una función en los cursos de análisis vectorial, será definido ahora como

$$\vec{\nabla}[\ ] = g^{\nu\mu}[\ ]_{;\mu}\,\mathbf{e}_\mu$$

Para el caso de una función escalar $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el operador aplicado a la función resulta en el vector gradiente

$$\vec{\nabla}[\phi] = g^{\nu\mu}[\phi]_{;\mu}\,\mathbf{e}_\mu = g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\,\mathbf{e}_\nu$$

Ahora no podemos escribir más $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Gradiente y Divergencia de Tensores

Con las definiciones de $\tilde{\nabla}$ y $\vec{\nabla}$ vamos a definir

Operadores sobre tensores

- $$\textbf{Grad}[\ \ ] = \tilde{\nabla} \otimes [\ \ ]$$
- $$\textbf{Div}[\ \ ] = \vec{\nabla} \bullet [\ \ ]$$

Observaciones

- El operador **Grad** puede ser aplicado a tensores de cualquier tipo.
- El operador **Div** sólo puede aplicarse a tensores contravariantes.

Ejemplo 1

Gradiente de un Tensor del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Consideremos un tensor $\mathbf{T}$ del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}_{\alpha} \mathbf{dx}^{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\mu} \otimes \mathbf{e}_{\nu}$$

Entonces,

$$\mathbf{Grad}[\mathbf{T}] = T^{\mu\nu}_{\alpha;\beta}\, \mathbf{dx}^{\beta} \otimes \mathbf{dx}^{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\mu} \otimes \mathbf{e}_{\nu}$$

que es del tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2

Divergencia de un Tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Consideremos un tensor $\mathbf{T}$ del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, en decir,

$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$ Entonces,

$$\mathbf{Div}[\mathbf{T}] = \vec{\nabla} \bullet T^{\mu\nu}\ \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu = g^{\alpha\beta}\, T^{\mu\nu}_{;\alpha} \langle \mathbf{e}_\beta | \mathbf{e}_\mu \rangle\, \mathbf{e}_\nu = T^{\mu\nu}_{;\mu}\, \mathbf{e}_\nu$$

que es del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notemos que para un vector contravariante, la divergencia se escribe

$$\mathbf{Div}\,[\vec{v}] = v^{\mu}_{;\mu}$$

El Laplaciano

Vamos a definir el Laplaciano a partir del vector gradiente y la divergencia, a partir de la relación

$$\nabla^2[\ \ ] = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \otimes [\ \ ]$$

En virtud de las definiciones y las restricciones para los productos, el Laplaciano sólo puede calculársele a tensores estrictamente contravariantes.
Sea $\mathbf{T}$ una vez contravariante, entonces, el Laplaciano será

$$\begin{aligned}
\nabla^2[\mathbf{T}] &= \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \otimes [T^{\mu\nu}\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu] = \vec{\nabla} \bullet \left\{ g^{\alpha\beta} T^{\mu\nu}_{;\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \right\} \\
&= g^{\lambda\sigma} \left[g^{\alpha\beta} T^{\mu\nu}_{;\beta} \right]_{;\sigma} \langle \mathbf{e}_\lambda | \mathbf{e}_\alpha \rangle \ \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \\
&= g^{\lambda\sigma} g_{\lambda\alpha} \left[g^{\alpha\beta} T^{\mu\nu}_{;\beta} \right]_{;\sigma} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu
\end{aligned}$$

El Laplaciano de un campo escalar

Consideremos ahora un campo escalar, ϕ. El Laplaciano podemos escribirlo como

$$\begin{aligned}
\nabla^2[\phi] &= \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} \otimes [\phi] \\
&= \vec{\nabla} \bullet \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha \right] \\
&= g^{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \right]_{;\nu} \langle \mathbf{e}_\mu | \mathbf{e}_\alpha \rangle \\
&= g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \right]_{;\nu} \\
&= \left[g^{\nu\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \right]_{;\nu}
\end{aligned}$$

Y, utilizando la relación de los símbolos de Christoffel con la raíz del determinante de la métrica, podemos escribir, finalmente,

$$\nabla^2[\phi] = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{g} g^{\nu\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \right]$$