

Matemáticas Especiales II - Segundo Cuatrimestre
Clases Teóricas 2015
Octavio Miloni

Para tener en cuenta:

- Estas notas son orientadoras de los temas que se dictan en cada clase
- Estas notas son resúmenes de los temas dictados, con mayor o menor grado de desarrollo
- Estas notas no son apuntes de la materia
- Estas notas no sustituyen las clases teóricas
- Estas notas no sustituyen la lectura y consulta de la bibliografía

Clase Número 1

Teorema de Cauchy para Sistemas de Ec. Diferenciales

- Definiciones. Problema de Cauchy
- Ejemplos
- Construcción de una Serie Formal
- Integral de Cauchy para funciones de n variables complejas
- Teorema de Cauchy. Soluciones Analíticas

Definición de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden. Problema de Cauchy

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un conjunto de n ecuaciones

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Si además imponemos

$$x_j(t_0) = x_{j0}$$

decimos que es un problema de valor inicial, PVI, o *problema de Cauchy*. Entonces, un PVI será

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) & j = 1, 2, \dots, n \\ x_j(t_0) = x_{j0} \end{cases}$$

- **Modelo Predador-Presa:** Sea x la cantidad de predadores e y la cantidad de presas la evolución temporal del sistema es modelizada (ecuaciones de Lotka-Volterra). Puede representar vacunas-virus, etc.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-\alpha + \beta y) & \alpha, \beta \in \mathcal{R} \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma - \delta x) & \gamma, \delta \in \mathcal{R} \end{cases}$$

- **Efecto de marea para un planeta** Las variaciones en el semieje de la órbita y en la excentricidad por efecto de marea producida por una estrella central es

$$\begin{cases} \langle \frac{da}{dt} \rangle = -\frac{4}{3} \frac{n}{a^4} [(1 + 23e^2 + 7e^2 D)] \\ \langle \frac{de}{dt} \rangle = -\frac{2}{3} \frac{n}{a^5} [9 + 7D] \end{cases} \quad D = D(m, R, r)$$

Construcción de Solución mediante serie formal

Sea $x_j(t)$ una función analítica de t (después entraremos en detalles) entonces, admite una representación en serie de Taylor

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \frac{dx_j(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \dots$$

Podemos notar que cada uno de los coeficientes del desarrollo puede ser obtenido a partir del PVI.

- $x_j(t_0) = x_{j0}$
- $\frac{dx_j(t_0)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)$
- $\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} \frac{dx_k(t_0)}{dt} =$
 $\frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}(t_0), t_0)$

Y así sucesivamente. Lo que significa, que el propio PVI nos permite construir la serie de Taylor, aunque el cálculo de coeficientes sea cada vez más engorroso

Ejemplo: Solución a orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-0.3 + 0.01y), & x(0) = 9 \\ \frac{dy}{dt} = y(0.1 - 0.02x), & y(0) = 40 \end{cases}$$

Tenemos, $x(0) = 9$, $y(0) = 40$. Además reemplazando estos valores en el propio sistema, tendremos $\frac{dx}{dt}(0) = 0.9$ y $\frac{dy}{dt}(0) = -6.8$

Ahora,

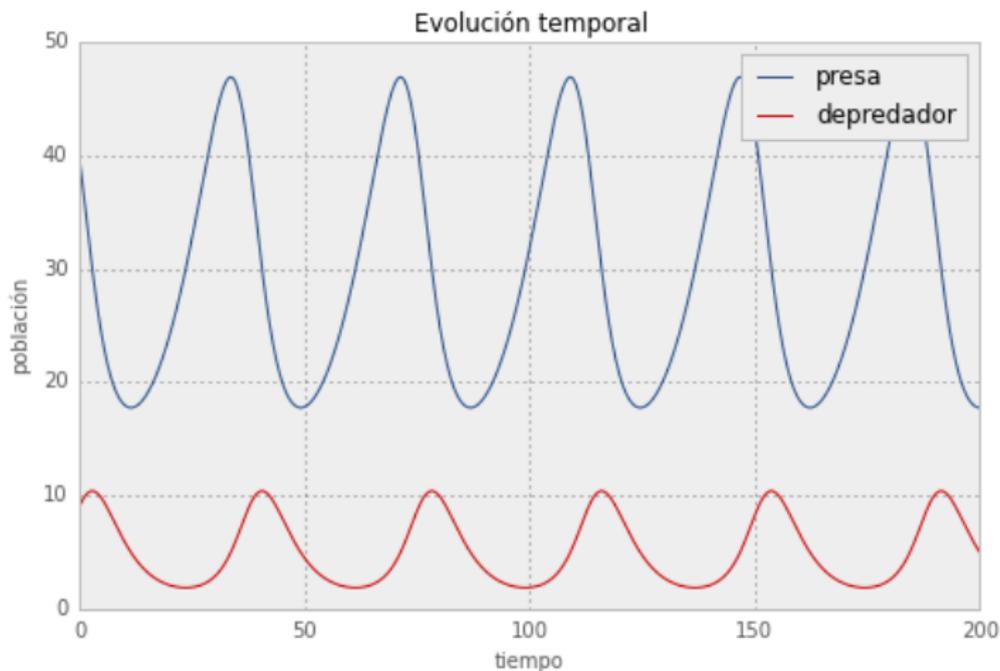
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}(-0.1 + 0.2y) + x \cdot 0.2 \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}(0) = -5.13$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt}(0.01 - 0.02x) - y \cdot 0.02 \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0.436$$

Entonces, hasta orden 2 tendremos

$$\begin{cases} x(t) = 9 + 0.9t - 2.565t^2 \\ y(t) = 40 - 6.8t - 2.28t^2 \end{cases}$$

Gráfico de la solución exacta



Repaso de la Integral de Cauchy en varias variables

Sea $f(z) : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Sea \mathcal{D} y $z_0 \in \mathcal{D}$ Entonces la derivada n -ésima se calcula a partir de la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz$$

Si consideramos una función de n variables $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ tenemos

$$\frac{1}{j_1! j_2! \dots j_n!} \frac{\partial^{j_1 + j_2 + \dots + j_n} f}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \dots \oint_{\gamma_n} \frac{f(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) dz'_1 dz'_2 \dots dz'_n}{(z'_1 - z_1)^{j_1+1} (z'_2 - z_2)^{j_2+1} \dots (z'_n - z_n)^{j_n+1}}$$

donde cada curva está en los planos complejos asociados a cada variable y donde la región se supone

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_n$$

Función Mayorante

Con lo anterior, dado el PVI, supongamos que las funciones $f_j(\mathbf{x}; t)$ vamos a suponer:

- Las funciones f_j son analíticas en el dominio \mathcal{D}' definido por $\mathcal{D}' : |x_j - x_{j0}| < r'_j, \quad |t - t_0| < \rho'$ Entonces admiten un desarrollo de Taylor

$$f_j(\mathbf{x}; t) = \sum_{j_t, j_1, j_2, \dots, j_n=0}^{\infty} c_{j_t, j_1, j_2, \dots, j_n} (t - t_0)^{j_t} (x_1 - x_{10})^{j_1} (x_2 - x_{20})^{j_2} \cdots (x_n - x_{n0})^{j_n}$$

- Todas las funciones f_j poseen una **misma** función *mayorante*

$$|f_j(\mathbf{x}; t)| < \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{10}) + (x_2 - x_{20}) + \cdots + (x_n - x_{n0})}{r}\right] \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}, \quad M = \max_j \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$$

en el conjunto cerrado $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ definido por

$$\mathcal{D} : |x_j - x_{j0}| \leq r < \min\{r'_1, r'_2, \dots, r'_n\}, \quad |t - t_0| \leq \rho < \rho'$$

Sistema Auxiliar y Reducción

A partir de las propiedades de las funciones que definen el PVI, podemos construir un sistema auxiliar

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{10}) + (x_2 - x_{20}) + \dots + (x_n - x_{n0})}{r}\right] \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{10}) + (x_2 - x_{20}) + \dots + (x_n - x_{n0})}{r}\right] \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)} \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{10}) + (x_2 - x_{20}) + \dots + (x_n - x_{n0})}{r}\right] \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}\end{aligned}$$

Notando que todas las ecuaciones diferenciales son iguales para cada variable, si hacemos el siguiente cambio de variables

$\xi = x_1 - x_{10} = x_2 - x_{20} = \dots = x_n - x_{n0}$ podemos reducir todo a una sola ecuación

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{n\xi}{r}\right) \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}, \quad \xi(t_0) = 0$$

Teorema de Cauchy

La ecuación auxiliar obtenida

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{n\xi}{r}\right) \left(1 - \frac{t-t_0}{\rho}\right)}, \quad \xi(t_0) = 0$$

Tiene por solución (de obtención trivial, por variables separables)

$$\xi(t) = \frac{r}{n} \left[1 - \sqrt{1 + 2M n \frac{\rho}{r} \log \left(1 - \frac{t-t_0}{\rho} \right)} \right]$$

Donde el dominio de analiticidad es

$$|t - t_0| \leq \rho \left[1 - e^{\left(-\frac{1}{2M n} \frac{r}{\rho}\right)} \right]$$

Es más, si el sistema es autónomo (no depende de t) el dominio será

$$|t - t_0| \leq \frac{r}{2M n}$$

- Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)
- Goursat, E. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer Verlag (1962)
- Forsyth, Andrew R. *Theory of Differential Equations*, Vol. II, Parte II Ed. Cambridge Academic Press (1900)

Clase Número 2

Método de Picard para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

- Definiciones. Iteraciones
- Esquema de Iteración para Sistemas de Ec. Diferenciales
- Exponencial de una matriz. Introducción
- Condición de Lipschitz
- Estudio de Convergencia

Esquemas Iterativos

Definición. Un esquema iterativo es un procedimiento secuencial que procura aproximar una determinada cantidad a partir de una repetición de operaciones con la cantidad obtenida en el paso anterior. Este método también es denominado de aproximaciones sucesivas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x - \cos(x) = 0$. La solución es $x \approx 0.3167513$. Si despejamos de manera "ingenua" $x = \frac{\cos(x)}{3}$, y definimos la sucesión $x_0 = 0$, $x_{\ell+1} = \frac{\cos(x_\ell)}{3}$ entonces

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\cos(0)}{3} = 0.3333333 \\x_2 &= \frac{\cos(0.3333333)}{3} = 0.3149857 \\x_3 &= \frac{\cos(0.3149857)}{3} = 0.31693360 \\x_4 &= \frac{\cos(0.31693360)}{3} = 0.31673184 \\&\vdots = \vdots\end{aligned}$$

Ya x_4 tiene 4 decimales correctos!

Análisis de Convergencia de Iteraciones

En general, un esquema iterativo se puede representar como, dada una aproximación inicial, x_0 ,

$$x_{l+1} = \varphi(x_l)$$

Si llamamos α a la solución exacta al problema en cuestión, podemos desarrollar la función de iteración alrededor de α

$$x_{l+1} = \varphi(x_l) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)(x_l - \alpha), \quad \xi \in (\alpha - x_l, \alpha + x_l)$$

el error en la aproximación l -ésima será $\varepsilon_l = x_l - \alpha$ y por definición, tendremos, $\alpha = \varphi(\alpha)$

$$\varepsilon_{l+1} = [\varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)(x_l - \alpha)] - \alpha$$

Entonces, tendremos

$$|\varepsilon_{l+1}| = |\varphi'(\xi)| |x_l - \alpha| = |\varphi'(\xi)| |\varepsilon_l|$$

Sea M una cota uniforme de la derivada de $\varphi'(x)$ podemos escribir

$$|\varepsilon_l| \leq M^l |\varepsilon_0| \quad \text{Entonces, si } M < 1 \rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$$

A tener en cuenta...

Dado un esquema iterativo, también denominado *iteración funcional*.

Se debe satisfacer:

- Definir una función de iteración
- Que para x_ℓ pueda calcularse el $x_{\ell+1}$
- Que la sucesión sea convergente
- Que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} |x_\ell - \alpha| = 0$$

donde α es el valor solución

En general, la función de iteración se obtiene de un "*despeje*" funcional, no en el sentido estricto de despejar para resolver.

Iteración para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}; t), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_\ell(t_0) = x_{\ell 0} \end{cases}$$

Un "despeje" sería, integrando a ambos miembros

$$x_\ell(t) - x_{\ell 0} = \int_{t_0}^t \frac{dx_\ell}{dt}(t') dt' = \int_{t_0}^t f_\ell(\mathbf{x}(t'); t') dt'$$

La $x_\ell(t)$ despejada satisface la ecuación diferencial (demostrar esto).
Lo que implica que podemos definir un esquema de iteración funcional

$$\begin{cases} x_\ell^{(0)}(t) = x_{\ell 0} \\ x_\ell^{(n+1)}(t) = x_{\ell 0} + \int_{t_0}^t f_\ell(\mathbf{x}_\ell^{(n)}(t'); t') dt' \end{cases}$$

Teorema de Picard: Caso $n = 1$

Para entender como funciona el esquema iterativo, comencemos con el caso unidimensional

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f(x, t) : |x - x_0| \leq a \times |t - t_0| \leq T \rightarrow \mathcal{R}$ en principio, continua en la región.

Entonces, el esquema iterativo será

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{\ell+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{\ell}(t'), t') dt' \end{cases}$$

Un Ejemplo para ver como funciona

A modo de ver el funcionamiento del esquema iterativo, analicemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

El esquema iterativo será,

$$\begin{cases} x_0(t) = a \\ x_{\ell+1}(t) = a + \int_{t_0}^t x_{\ell}(t') dt' \end{cases}$$

Entonces, la sucesión es:

$$x_0(t) = a$$

$$x_1(t) = a + \int_{t_0}^t x_0(t') dt' = a + \int_{t_0}^t a dt' = a + a(t - t_0)$$

$$x_2(t) = a + \int_{t_0}^t x_1(t') dt' = a + \int_{t_0}^t [a + a(t - t_0)] dt' = a + a(t - t_0) + a \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$x_3(t) = a + \int_{t_0}^t x_2(t') dt' = a + \int_{t_0}^t \left[a + a(t - t_0) + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \right] dt' = a \left[1 + (t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{(t - t_0)^3}{3!} \right]$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_n(t) = a \sum_{j=0}^n \frac{(t - t_0)^j}{j!}, \quad \implies \quad x(t) = a e^{(t-t_0)}$$

Sobre la iteración. Continuidad de las funciones iteradas

Hemos visto que un esquema iterativo tiene sentido si la iteración puede efectuarse infinitamente, es decir, no se trunca.

Veamos que todas las funciones iteradas son continuas en el intervalo $|t - t_0| \leq \alpha = \min\{T, \frac{a}{M}\}$, donde M es el máximo de la función f en la región de definición (que como es un intervalo cerrado y acotado, tendrá su máximo absoluto). Veamos: Para la primera función iterada, tendremos

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(x_0(t'), t')| dt' \leq M |t - t_0| \leq a$$

esto indica que $x_1(t)$ yace sobre el dominio de definición de f , por lo que podemos integrar para obtener la próxima iteración. Además, $x_0 = x_\ell(t_0)$ para todo ℓ , por lo que en particular, si $|t - t_0| < \delta$ entonces

$$|x_1(t) - x_1(0)| < \varepsilon$$

Por inducción probamos que $\forall \ell$, $x_\ell(t)$ es continua en t_0

Condición de Lipschitz

Dada una función $f(x, t)$, decimos que satisface la condición de Lipschitz si existe una constante positiva L tal que satisface

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| \leq L |x_2 - x_1|$$

Una condición suficiente para que una función sea Lipschitz es que su derivada parcial sea continua, veamos. Si la derivada parcial es continua, podemos escribir

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, t) \right| dx^* \leq L |x_2 - x_1|$$

donde L es una cota para la derivada parcial.

Convergencia de la Sucesión

Asumamos que la función $f(x, t)$ es Lipschitz y calculemos $|x_2(t) - x_1(t)|$

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^t [f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t')] dt'$$

Ya habíamos demostrado

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(x_0(t'), t')| dt' \leq M |t - t_0|$$

Además, como es de Lipschitz, podemos acotar

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t')| dt' \leq L |x_1(t) - x_0(t)| \leq LM \int_{t_0}^t |t - t_0| dt' = LM \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq ML \frac{\alpha^2}{2}$$

Análogamente,

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq LM^2 \frac{|t - t_0|^3}{3!} = \frac{L}{M} \frac{(M|t - t_0|)^3}{3!} \leq \frac{M}{L} \frac{L^3 \alpha^3}{3!}$$

En general, podemos demostrar por inducción

$$|x_\ell(t) - x_{\ell-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{[L|t - t_0|]^\ell}{\ell!} \leq \frac{M}{L} \frac{[L\alpha]^\ell}{\ell!}$$

Límite de la Sucesión

Sea $x(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell(t)$ y calculemos $|x(t) - x_\ell(t)|$ Primero notemos que podemos escribir

$$x_\ell(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\ell} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]$$

y, por definición,

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]$$

Entonces, tenemos

$$x(t) - x_\ell(t) = \sum_{j=\ell+1}^{\infty} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]$$

Calculando el valor absoluto,

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} |x_j(t) - x_{j-1}(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L\alpha)^j}{j!}$$

Si reescribimos esta sumatoria para que comience con $j = 0$

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^j}{j!} = \frac{M}{L} \frac{(L\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{L\alpha}$$

El Límite de la Sucesión es solución!

Habiendo probado la convergencia, resta probar que la función a la cual converge es justamente solución del PVI

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(t'), t') dt'$$

como ya comprobamos que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell(t) = x(t)$ sólo falta demostrar que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(x_\ell(t'), t') dt' = \int_{t_0}^t f(x(t'), t') dt'$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(x(t'), t') dt' - \int_{t_0}^t f(x_\ell(t'), t') dt' \right| &\leq L \int_{t_0}^t |x(t') - x_\ell(t')| dt' \\ &\leq \frac{L}{M} \frac{(M\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\alpha} \int_{t_0}^t dt' \\ &\leq \frac{L}{M} \frac{(M\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\alpha} \alpha \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando ℓ tiende a infinito.

Esto concluye la demostración de la convergencia del Método de Picard.

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Goursat, Edouard. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Ince, Edward L. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Dover (1956)

Clase Número 3

Aspectos Algebraicos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

- Definiciones. Sistemas Lineales
- Caso Homogéneo. Espacio de Soluciones
- Matriz Fundamental
- Propagador
- Caso Coeficientes Constantes
- Forma Diagonal y de Jordan

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es de la forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \mathbf{F}(t)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}[t]$ y $\mathbf{F}(t) \in \mathcal{R}^n[t]$. o, en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Por el Teorema de Picard, si $\mathbf{A}(t)$ tiene componentes continuas habrá solución. **Por qué?**

Si

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Decimos que el sistema lineal es homogéneo

Existencia de solución para el caso homogéneo

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Definiendo el operador lineal

$$L = \frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t)$$

el núcleo

$$\left[\frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t) \right] \vec{x} = \vec{0}$$

tiene dimensión n .

Sea $\mathbf{A}(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}[t]$. Dado el operador

$$L = \frac{d}{dt} - \mathbf{A}(t)$$

- Este operador está definido en $\mathcal{R}^n[t]$
- Si $\mathbf{A}(t)$ está compuesta por $n \times n$ funciones continuas, existe una única solución al PVI asociado

$$\frac{d}{dt} \vec{x} - \mathbf{A}(t) \vec{x} = \vec{0}, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

en un entorno de t_0 (Teorema de Picard)

- Aplica a **componentes**, **no coordenadas**

Dimensión del Núcleo

Consideremos n vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, base canónica de \mathcal{R}^n . En esta

base, cualquier vector de $\mathcal{R}^n[t]$ podrá escribirse (en componentes) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

En general, si tomamos n vectores \vec{v}_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, n$ tendremos

$\vec{v}_\ell(t) = \begin{pmatrix} v_{\ell 1}(t) \\ v_{\ell 2}(t) \\ \vdots \\ v_{\ell n}(t) \end{pmatrix}$ Ahora supongamos que los \vec{v}_ℓ satisfacen el PVI

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_\ell - \mathbf{A}(t) \vec{v}_\ell = \vec{0}, \quad \vec{v}_\ell(t_0) = \mathbf{e}_\ell$$

Aprovechando esta imposición, si $\vec{x}(t)$ es solución del PVI, tendremos que

$$\vec{x}(t_0) = \sum_{\ell=1}^n \lambda^\ell \mathbf{e}_\ell = \sum_{\ell=1}^n \lambda^\ell \vec{v}_\ell(t_0)$$

Entonces, tendremos

$$\vec{x}(t) = \sum_{\ell=1}^n \lambda^\ell \vec{v}_\ell(t)$$

y linealmente independientes! (demostrar)

Trabajando en Coordenadas: Matriz Fundamental

Trabajando en coordenadas, la solución general puede escribirse como un producto de matrices:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & \cdots & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t)\vec{\lambda}$$

donde

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ x_1^2(t) \\ \vdots \\ x_1^n(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2^1(t) \\ x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_2^n(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^1(t) \\ x_n^2(t) \\ \vdots \\ x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

Es decir, se encolumnan los vectores generadores de la solución general. A la matriz $\mathbf{U}(t)$ se la denomina *matriz fundamental*. EL determinante de la matriz fundamental se lo denomina *Wronskiano*

El Propagador

si la condición inicial es $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, entonces, tendremos

$$\vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x^1(t_0) \\ x^2(t_0) \\ \vdots \\ x^n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t_0) & x_2^1(t_0) & \cdots & x_n^1(t_0) \\ x_1^2(t_0) & x_2^2(t_0) & \cdots & x_n^2(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n(t_0) & x_2^n(t_0) & \cdots & x_n^n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t_0)\vec{\lambda}$$

Como el Wronskiano es distinto de cero, la matriz fundamental admite inversa, por lo que

$$\vec{\lambda} = [\mathbf{U}(t_0)]^{-1} \vec{x}_0$$

Entonces, la solución del problema de valor inicial

$$\vec{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t_0)\vec{x}_0 = \boldsymbol{\Psi}(t, t_0)\vec{x}_0$$

Donde $\boldsymbol{\Psi}(t, t_0)$ es el denominado *propagador* del sistema. Este propagador actúa sobre el espacio de condiciones iniciales representando la evolución temporal.

El propagador satisface la ecuación diferencial con la condición inicial

$$\boldsymbol{\Psi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

Sistemas con coeficientes constantes

Consideremos el Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A} \vec{x} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

con \mathbf{A} una matriz de componentes constantes.

Aplicando Picard:

- $\vec{x}^{(0)}(t) = \vec{x}_0$
- $\vec{x}^{(1)}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A} \vec{x}^{(0)} dt' = \vec{x}_0 + \mathbf{A} (t - t_0) \vec{x}_0 = [\mathbf{I} + \mathbf{A} (t - t_0)] \vec{x}_0$
- $\vec{x}^{(2)}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A} \vec{x}^{(1)} dt' = \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{A} (t - t_0) + \frac{[\mathbf{A} (t - t_0)]^2}{2!} \right\} \vec{x}_0$
- \vdots
- $\vec{x}^{(n)}(t) = \left\{ \sum_{\ell=0}^n \frac{[\mathbf{A} (t - t_0)]^\ell}{\ell!} \right\} \vec{x}_0$

Entonces, tomando límite tenemos, formalmente

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \vec{x}_0 \quad \rightarrow \quad \Psi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \quad \mathbf{A} \text{ matriz!}$$

Caso Diagonalizable

Si la matriz \mathbf{A} llegara a ser diagonalizable, existirá la matriz \mathbf{P} con inversa tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$. Entonces, $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$

Notemos además que

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \mathbf{D}^n \mathbf{P}^{-1}$$

Entonces,

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Los λ_j no precisan ser todos distintos.

Forma de Jordan

En el caso en que la matriz fundamental no sea diagonalizable, apelamos a las formas de Jordan.

- Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ los autovalores distintos de la matriz.
- Llamemos n_k a la multiplicidad geométrica de λ_k

En este caso, la matriz fundamental puede escribirse como

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}$$

Donde para cada bloque de Jordan $k \times k$ se tiene

$$e^{\mathbf{J}_k t} = e^{(\mathbf{D}_k + \mathbf{N}_k)t} = e^{\lambda_k t} \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{N}_k t + \frac{[\mathbf{N}_k t]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{N}_k t]^3}{3!} + \dots + \frac{[\mathbf{N}_k t]^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right\}$$

donde k es la multiplicidad geométrica del autovalor

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase*, <http://fcaglp.unlp.edu.ar/nmaffione/Mat-Ava/pdfs/Apuntes-MA2015.pdf>
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) <http://sedici.unlp.edu.ar> (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)

Clase Número 4

Métodos Elementales de de Resolución de Ecuaciones Diferenciales

- Variables Separables
- Ecuación Lineal
- Ecuaciones Exactas
- Factor Integrante
- Ecuaciones Homogéneas

Variables Separables

Definición de Ecuación Separable. Un ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

se denomina separable si puede escribirse como

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) f_2(t)$$

Casos Particulares

- Si

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{de dice que la ecuación es } \mathbf{\text{ecuación autónoma}}$$

- Si

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \quad \text{de dice que la ecuación es una } \mathbf{\text{integración trivial}}$$

Variables Separables. Método de Resolución

Dada la ecuación separable,

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) f_2(t)$$

podemos reescribirla como

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{dx}{dt} = f_2(t)$$

Ahora, notemos que

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [F_1(x(t))] \quad \rightarrow \quad F(x(t)) = \int f_2(t) dt + C$$

Ahora, como $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{d}{dx} [F(x)]$ entonces, $F(x) = \int \frac{1}{f_1(x)} dx$ con lo que podemos resolver la ecuación

$$\int \frac{1}{f_1(x)} dx = \int f_2(t) dt + C \quad \text{resolviendo tenemos} \quad x(t)$$

Variables Separables. Resolución "Non Sancta" y Ejemplos

Resolución "Non Sancta"

Dada la ecuación separable, $\frac{dx}{dt} = f_1(x) f_2(t)$ si consideramos $\frac{dx}{dt}$ como un cociente (no lo es!) podríamos escribir

$$\frac{1}{f_1(x)} dx = f_2(t) dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{f_1(x)} dx = \int f_2(t) dt + C \rightarrow x(t)$$

————— 0 —————

Ejemplos Resolver las siguientes ecuaciones separables

•

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}$$

•

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad y(4) = -3 \quad \text{No siempre es } x(t)$$

•

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4$$

Pérdida de Solución! (conversar)

Definición. Decimos que la ecuación es lineal si la podemos escribir como

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$$

- Caso homogéneo: $b(t) = 0$. Es a variable separable y la solución general se puede escribir como $x_h(t) = C e^{\int a(t) dt}$, $C = \text{Constante}$
- Caso no-homogéneo.

Idea: Aprovechar la solución de la homogénea, pero con $C = C(t)$:

Entonces, se propone $x(t) = C(t)e^{\int a(t) dt}$. Imponiendo que se satisfaga la ecuación diferencial, tenemos que $C(t)$ debe satisfacer

$$C(t) = \int b(t) e^{-\int a(t) dt} + K$$

lo que implica que la solución es **dada como en fórmula!**

$$x(t) = \left\{ \int b(t) e^{-\int a(t) dt} + K \right\} e^{\int a(t) dt}$$

Ecuaciones Exactas

Si $\varphi(x, t)$ es diferenciable en un entorno de un punto (x_0, t_0) además $\varphi(x, t) = c$ podemos asumir (si $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$) que define implícitamente x como función de t tenemos

$$\frac{d}{dt} [\varphi(x, t)] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = 0$$

En términos de la diferencial de la función se puede escribir

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dt = 0$$

Inversamente, si tenemos una ecuación diferencial escrita en la forma

$$M(x, t) dx + N(x, t) dt = 0$$

Si existe una función $\varphi(x, t)$ tal que

$$M(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, \quad N(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$$

entonces, existen curvas integrales

$$\varphi(x, t) = c$$

Teorema. *Dada la ecuación diferencial*

$$M(x, t) dx + N(x, t) dt = 0$$

donde las funciones M , N , ∂M , ∂N son continuas en un determinado dominio simplemente conexo, y además

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial N(x, t)}{\partial x}$$

existe una curva integral definida a través de

$$\varphi(x, t) = c$$

La demostración se basa en las condiciones necesarias para la diferenciabilidad

La construcción de la función $\varphi(x, t)$ se obtiene directamente con la técnica de obtención de función potencial.

Factor Integrante

Para el caso en que la ecuación diferencial

$$M(x, t) dx + N(x, t) dt = 0$$

no sea exacta, se busca una función $\mu(x, t)$ de manera tal que la ecuación

$$\mu(x, t) M(x, t) dx + \mu(x, t) N(x, t) dt = 0$$

lo sea

La función $\mu(x, t)$ es denominada *factor integrante* y se obtiene a partir de imponer la condición

$$\frac{\partial[\mu(x, t) M(x, t)]}{\partial t} = \frac{\partial[\mu(x, t) N(x, t)]}{\partial x}$$

Factor Integrante. Determinación

Si la ecuación no es exacta y proponemos un factor integrante nos encontramos que debe satisfacerse

$$\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial x} N(x, t) - \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} M(x, t) = \mu(x, t) \left[\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \right]$$

Ecuación diferencial parcial para $\mu(x, t)$! Estamos peor!

Propuesta: Asumir que $\mu(x, t)$ depende de una sola variable

- $\mu = \mu(x)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x, t)}{\partial x}}{N(x, t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } x!!} \mu(x)$$

- $\mu = \mu(t)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, t)}{\partial t}}{M(x, t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } t!!} \mu(t)$$

Ecuaciones Homogéneas

Definición. Decimos que una función $f(x, t)$ es homogénea de grado n si y sólo si

$$f(\lambda x, \lambda t) = \lambda^n f(x, t)$$

Definición. Decimos que una ecuación diferencial

$$M(x, t) dx + N(x, t) dt = 0$$

es homogénea de grado n si y sólo si las funciones $M(x, t)$ y $N(x, t)$ lo son

Podemos notar que $x = x \cdot 1$ y $t = x \frac{t}{x}$. Si cambiamos la variable $u = \frac{t}{x}$ tendremos que $t = ux$ con lo que

$$dt = u dx + x du$$

Si la ecuación dif. es homogénea e introducimos el cambio de variables la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{1}{x} dx + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + u N(1, u)} du = 0 \quad \text{variables separables}$$

- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)
- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A (1968)

Clase Número 5

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Coeficientes Constantes

- Ecuación Homogénea
 - Propuesta de soluciones $e^{\alpha t}$. Ecuación Característica
 - Casos: α 's reales distintos
 - Casos: α 's complejos distintos
 - Casos: α 's iguales
- Caso no homogéneo: Variación de los parámetros

Ecuación Homogénea

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

Para darle un marco de sistemas de ec. diferenciales lineales, podemos definir $y(t) = x'(t)$ con lo que tenemos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned}x'(t) &= y \\y'(t) &= -ay - bx\end{aligned}$$

En términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo que se vio, **existen dos soluciones linealmente independientes**

Propuesta de soluciones $e^{\alpha t}$

De la reescritura de la ec. de segundo orden como un sistema de primer orden, podemos afirmar:

- Posee dos soluciones linealmente independientes
- El Problema de Valor Inicial necesita $x(t_0)$ e $x'(t_0)$

Para la búsqueda de las soluciones, consideremos como *ansatz*: $x(t) = e^{\alpha t}$
Reemplazando en la ec. diferencial

$$[\alpha^2 + a\alpha + b] e^{\alpha t} = 0 \quad \text{como } e^{\alpha t} \neq 0$$

Tenemos la *ecuación característica*

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \text{notemos que es la ec. de autovalores de la matriz } \mathbf{A}$$

tendremos los casos:

- Dos soluciones distintas (reales o complejas), α_1 y α_2
- Raíz doble: una única solución en α

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Si al resolver la ecuación característica tenemos que las raíces son distintas, hemos resuelto el problema y la solución general será

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Para el caso en que a y b sean **reales**, tendremos que

- α_1 y α_2 son reales. Entonces la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

- α_1 y α_2 son complejos conjugados $\alpha_1 = \eta + i\omega$, $\alpha_2 = \eta - i\omega$ y la solución se puede escribir

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\eta t} [c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}] \\ &= e^{\eta t} [(c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Caso $\alpha_1 = \alpha_2$

Para el caso en que la ecuación característica admita una raíz doble, apelaremos a la forma de Jordan para la matriz fundamental.

Recordemos que en la base de autovectores generalizados (ver formas de Jordan) la matriz de Jordan se escribe

$$J = \lambda \mathbf{I} + N$$

Para este caso, el autovalor será α (la raíz doble), la matriz es 2×2 y tendremos entonces que la forma de Jordan para la matriz fundamental

$$U = e^{\left[\begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Entonces,

$$U = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & t e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \rightarrow x_1(t) = e^{\alpha t} \text{ y } x_2(t) = t e^{\alpha t}$$

Problema No Homogéneo: Método de Variación de los Parámetros

Consideremos la ecuación

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$$

Notemos que Si $x_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea y $x_p(t)$ es una *solución particular*, tendremos que $x_h(t) + x_p(t)$ es también solución de la ecuación

A partir de esta propiedad -trivial, debido a la linealidad de la ecuación diferencial- es que se propone como solución particular

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las soluciones LI del problema homogéneo.

Cómo obtenemos $c_1(t)$ y $c_2(t)$? Imponiendo que la función propuesta satisfaga la ecuación diferencial

Las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$

A partir de la imposición de que la función propuesta satisfaga la ecuación, obtenemos ecuaciones para $c_1(t)$ y $c_2(t)$. La resolución de las ecuaciones nos brinda las funciones

$$c_1(t) = - \int \frac{x_2(t) f(t)}{W} dt$$
$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t) f(t)}{W} dt$$

donde

$$W = \det \left[\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \right] = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$$

que es el Wronskiano ya definido para sistemas de ecuaciones lineales

Función de Green

Reemplazando las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ en la solución particular

$$x_p(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t)$$

Tenemos

$$x_p(t) = \left[- \int \frac{x_2(t^*) f(t^*)}{W} dt^* \right] x_1(t) + \left[\int \frac{x_1(t^*) f(t^*)}{W} dt \right] x_2(t)$$

$$x_p(t) = \int^t \left[\frac{x_1(t^*) x_2(t) - x_1(t^*) x_2(t)}{x_1(t^*) x_2'(t^*) - x_1'(t^*) x_2(t^*)} \right] f(t^*) dt^*$$

Llamando **Función de Green** (ya volveremos a hablar de esta función)

$$G(t, t^*) = \left[\frac{x_1(t^*) x_2(t) - x_1(t^*) x_2(t)}{x_1(t^*) x_2'(t^*) - x_1'(t^*) x_2(t^*)} \right]$$

Podemos escribir

$$x_p(t) = \int^t G(t, t^*) f(t^*) dt^*$$

- Partícula libre: $x''(t) = 0$ (para hacerlo con este abordaje)
- Caída libre: $y''(t) = -g$
- Oscilador Armónico: $x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado: $x''(t) + b x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado y forzado: $x''(t) + b x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$
- Circuitos Corriente Alterna

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} f_{em}(t)$$

con L : autoinductancia, R : Resistencia y C : capacitancia. La $f_{em}(t)$ es el potencial eléctrico suministrado *fuerza electromotriz*

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase*, <http://fcaglp.unlp.edu.ar/nmaffione/Mat-Ava/pdfs/Apuntes-MA2015.pdf>
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) <http://sedici.unlp.edu.ar> (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)

Clase Número 6

Transformada de Laplace Definiciones y Propiedades

- Transformaciones Integrales
- Definición de Transformada de Laplace
- Ejemplos
- Funciones de Orden Exponencial
- Propiedades
- Función de Heaviside o escalón $\mu_{t_0}(t)$
- Función Gamma $\Gamma(x)$

Transformaciones Integrales

Definición. *Transformación Integral.* Dada una función $f(t)$, y una función de dos variables $K(s, t)$, la operación

$$\int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

define una transformación integral de $f(t)$, esto es

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

En particular, vamos a considerar transformaciones integrales de la forma

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} K(s, t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t) f(t) dt$$

cuando la integral sea convergente

Transformada de Laplace

Definición. Sea $f(t)$ definida en la recta real positiva. La Transformada de Laplace de $f(t)$ está definida como

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

siempre y cuando la integral sea convergente

Ejemplos

•

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

•

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

•

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

•

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Funciones de Orden Exponencial

Definición. Una función f es de orden exponencial si existen constantes positivas α , M y T tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \text{para } t \geq T$$

Ejemplos



$$|t| \leq e^t$$



$$|a t + b| \leq |a| |t| + |b| \leq (|a| + |b|) e^t$$



$$|A \cos(\omega t)| \leq |A| e^t$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Las funciones de orden exponencial tienen transformada de Laplace

Propiedades de la Transformada de Laplace

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

- Linealidad:

$$\mathcal{L}[\lambda f + g] = \lambda F(s) + G(s)$$

- Teorema de Traslación en el eje s :

$$\mathcal{L}[f(t) e^{at}] = F(s - a)$$

- Transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0) \quad \text{Soporte para aplicar a PVI}$$

- Transformada de una derivada n -ésima:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Derivada n -ésima de una Transformada:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Función de Heaviside o *escalón*

Definición. La función escalón o de Heaviside está definida como

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un **encendido abrupto** en $t = t_0$

Notemos además que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un **apagado abrupto** abrupto en $t = t_0$

Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t) f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

Función $\Gamma(x)$

La función $\Gamma(x)$ está definida, para $x > 0$, a través de

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Integrando por partes, podemos demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
Entonces, como $\Gamma(1) = 1$ tenemos que para x es natural,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Propiedades

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma''(x) > 0$. (Donde tiene aprox. su mínimo? Graficar para ver)
- $\Gamma(p) = s^{p+1} \mathcal{L}[t^p]$, $\forall p > -1, p \in \mathcal{R}$

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)

Clase Número 7

Transformada de Laplace Convolución y Aplicaciones

- Distribución Delta de Dirac $\delta(t - t_0)$
- Producto de Convolución
- Propiedades
- Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Lineales
- Aplicaciones a las Ecuaciones Integro-Diferenciales

Construcción por aproximación

Consideremos el siguiente pulso rectangular

$$\frac{1}{2\varepsilon} [\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)]$$

Grafiquemos esta función para diferentes valores de ε

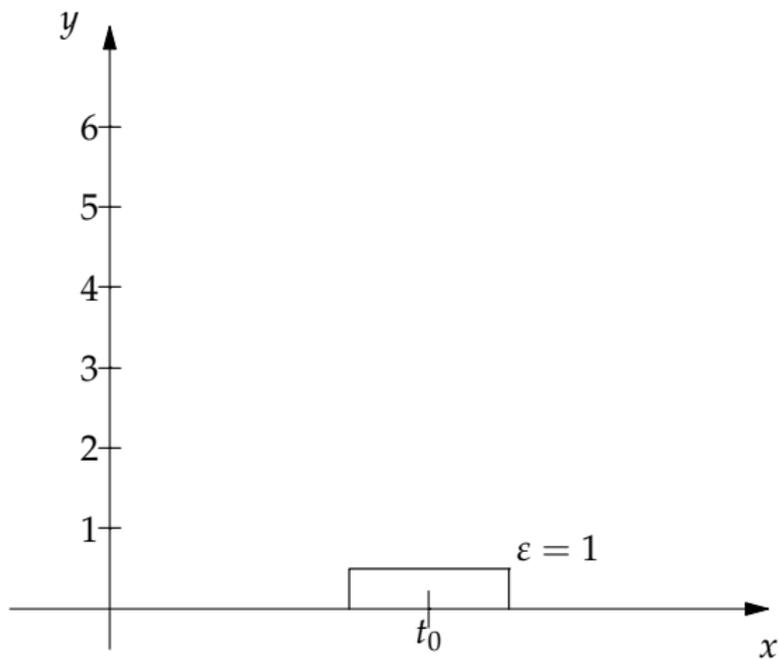
Vamos a definir la *distribución* $\delta(t - t_0)$, *Delta de Dirac* al límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} [\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)]$$

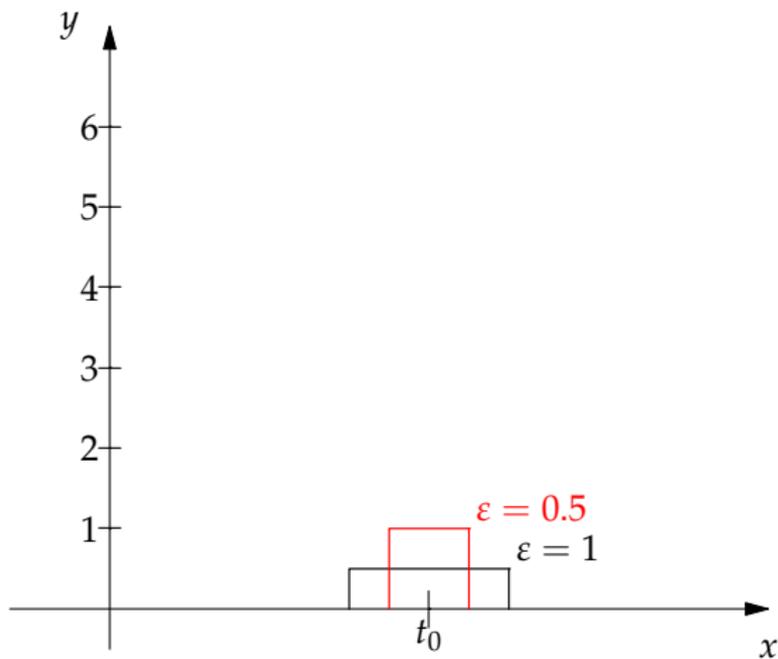
En virtud de cómo está definida, es un impulso infinito e instantáneo!

Veamos algunos gráficos de aproximaciones

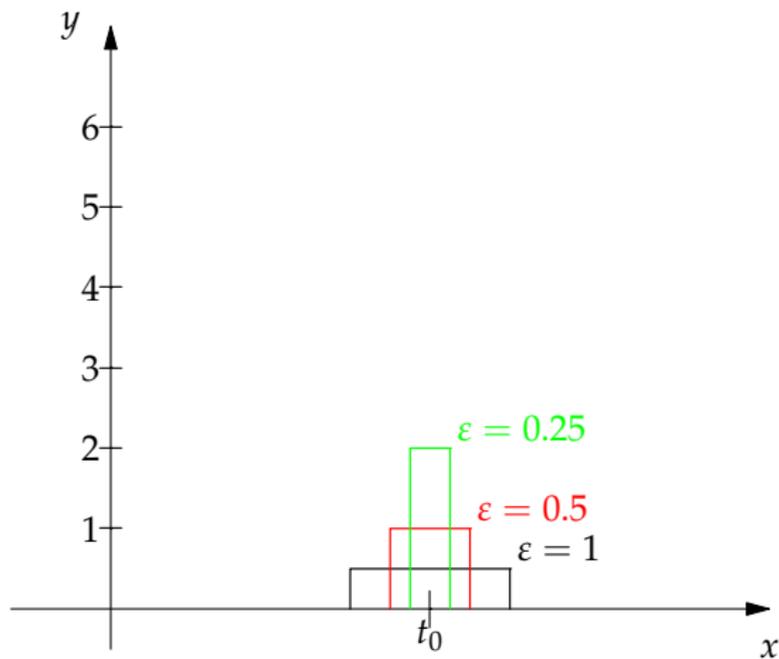
aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



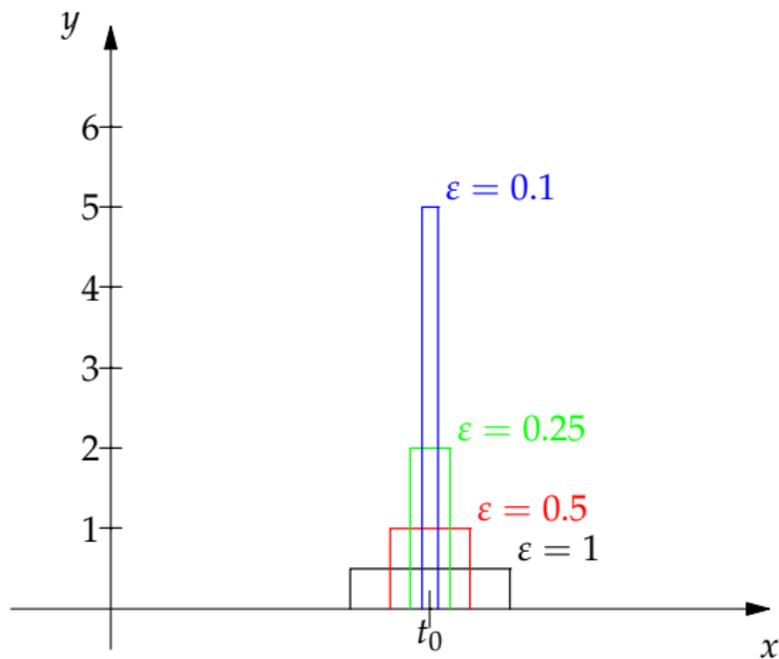
aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

- $$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s}$$

- $$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Convolución. Definición

Definición. Dadas las funciones f y g (en principio definidas en toda la recta real) se define la convolución entre f y g a través de

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(t - \eta)d\eta$$

En el contexto de la Transformada de Laplace, donde las funciones están definidas para los reales positivos, tendremos

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\eta)g(t - \eta)d\eta$$

Una interpretación física: Si $f(\eta)$ es un estímulo en η y $g(t - \eta)$ es la respuesta en t a un estímulo en η la convolución es la "suma" de todas las respuestas a ese estímulo.

Ejemplo: El potencial gravitatorio,

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' = -G \left(\rho * \frac{1}{\mathbf{r}} \right) (\mathbf{r})$$

Propiedades de la Convolución

- Conmutatividad

$$f * g = g * f$$

- Asociatividad

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

- Distributividad

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

- Asociatividad con estalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

- Regla de Derivación

$$D(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * Dg, \quad \text{donde } D \text{ es un operador diferencial}$$

El Teorema de la Convolución

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ se tiene

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s)$$

El producto de transformadas es el producto en \mathcal{R}

Idea de la Demostración. Calculemos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\eta)g(t - \eta)d\eta \right] e^{-st} dt$$

Transformamos a una integral doble en la región (**graficar para ver**) del plano $t\eta$ descrita por las relaciones $0 \leq \eta \leq t$, $0 \leq t < \infty$

La región se puede parametrizar también como $\eta \leq t < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $u = t - \eta$ y agrupando se demuestra la propiedad

Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Lineales

A partir de las propiedades de la Transformada de Laplace, principalmente en lo que respecta a las transformadas de derivadas podemos resolver problemas de valor inicial.

Dado el problema de valor inicial de segundo orden

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

Calculando la transformada de Laplace a ambos miembros, llamando $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ y $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ tendremos que el PVI lo podemos transformar

$$s^2 X(s) - s x_0 - v_0 + a(s X(s) - x_0) + b X(s) = F(s)$$

Entonces,

$$X(s) = \frac{F(s) + x_0 s + a x_0 + v_0}{s^2 + a s + b}$$

Antitransformando con las propiedades conocidas, obtenemos la $x(t)$

Aplicaciones a las Ecuaciones Integro-Diferenciales

De manera análoga a aplicar la transformada de Laplace para ecuaciones diferenciales, podemos aplicar a *ecuaciones integrales*

$$\phi(t) + \int_0^t K(\xi, t) \phi(\xi) d\xi = f(t)$$

o las denominadas *integro-diferenciales*

$$\phi''(t) + a\phi'(t) + b\phi(t) + d \int_0^t K(\xi, t) \phi(\xi) d\xi = f(t)$$

Ambas ecuaciones son ejemplos, no los únicos casos de aplicabilidad. En general, si la función que aparece en el integrando es del tipo $K(t - \xi)$ podremos interpretar la integral como una convolución y aplicar transformación de Laplace, de la misma manera

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)

Clase Número 8

Sistemas No Lineales

- Introducción. Soluciones en Serie
- Linealización. Comportamiento local
- Puntos de Equilibrio. Análisis de Estabilidad
- El plano de fase. Producto Directo
- Aplicación:
 - Predador-Presa (Modelo de Lotka-Volterra)
 - Especies Competidoras
- Integrales Primeras
- Sistemas Hamiltonianos

Introducción. Construcción de Soluciones Formales

Consideremos el PVI

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}; t), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Si además, las funciones f_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) no dependen de la variable independiente, t , el sistema se llama **autónomo**.
Entonces, un sistema autónomo se escribe

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Construcción de solución formal

En el caso de querer obtener una solución al sistema para cada t el PVI nos provee todo lo que necesitamos para construir, hasta el orden deseado, el polinomio de Taylor

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \frac{dx_j(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \dots$$

Los coeficientes para sistemas autónomos

- Orden 0:

$$x_j(t_0) = x_{j0} \quad (\text{Cond. Inicial})$$

- Orden 1:

$$\frac{dx_j(t_0)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0), \quad (\text{Ec. Diferencial})$$

- Orden 2:

$$\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} \frac{dx_k(t_0)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}(t_0), t_0)$$

Y así sucesivamente

Podemos notar que si bien el cálculo de las derivadas sucesivas se hace cada vez más engorroso, nada nos impide hacerlo.

Pregunta:

Si la solución del Problema de Valor Inicial tiene un intervalo en t de analiticidad $|t - t_0| < \tau$, cuál será el intervalo de confianza de la solución aproximada?

Es decir, si llamamos \tilde{x} a la solución aproximada, cuál será el intervalo de tiempo

$$|t - t_0| < \delta$$

en el que podamos afirmar que

$$|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon$$

Pensar en este asunto...

Otra Aproximación: Linealización

Otra aproximación al PVI es a partir de la linealización, es decir, dado el PVI Consideremos el PVI

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Desarrollando las funciones $f_\ell(\mathbf{x})$ a primer orden alrededor del punto inicial, tendremos

$$f_\ell(\mathbf{x}) \approx f_\ell(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) (x_k - x_{k,0})$$

Entonces, el problema linealizado lo podemos escribir matricialmente

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0) \mathbf{x}^t + \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0^t}_{\text{constante, no influye sustancialmente}}$$

donde $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y $\mathbf{D}[\mathbf{F}]$ es el Jacobiano de \mathbf{F}

Definición. Dado el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

diremos que \mathbf{x}_0 es un **punto crítico** si y sólo si $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ Entonces, un punto crítico es un punto de equilibrio, en términos dinámicos, ya que si la condición inicial coincide con el punto crítico, se tendrá que $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$ Entonces, definiendo el vector $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ podemos linealizar alrededor del punto crítico y obtener el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$$

Entonces el vector \mathbf{u} indica el comportamiento (en la aproximación lineal) alrededor del punto de equilibrio

Consideremos como hipótesis que la matriz $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ es diagonalizable. Entonces se tiene



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

Si y solo si los autovalores de $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa.

- $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ si y sólo si los autovalores de $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ son imaginarios puros
- En todos los casos restantes, existirá una dirección para la cual, cualquier punto inicial -aún muy próximo al punto de equilibrio- crecerá más allá de toda cota.

Caso $n = 2$: El plano de fase

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

Si bien, lo que se busca es una solución $x(t)$ e $y(t)$, es en muchos casos de gran utilidad el estudio del plano xy , también llamado **plano de fase**. Notemos que la ecuación que relaciona a x e y (para sistemas autónomos) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad \implies \quad y'(x) = f(x, y) \quad (\text{una única ecuación})$$

Cuidado: Este análisis estudia exclusivamente aspectos geométricos en el plano xy pero no nos proporciona la solución, $x(t)$ e $y(t)$, ya que eliminamos la variable t

Consideremos un par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(y)$$

donde en principio, x e y no tienen relación.

Definición. Dadas las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(y)$$

el producto directo será el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) \end{cases}$$

cuyo plano de fases será el producto cartesiano entre x e y .

Ejemplo

Notemos que a partir del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones puede resolverse por variables separables

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f_1(x)} dx = \int_{t_0}^t dt$$

y lo mismo para y

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f_2(y)} dy = \int_{t_0}^t dt$$

Lo que nos permite escribir, para el producto directo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f_1(x)} dx = t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f_2(y)} dy$$

y tratar a x e y en el mismo plano, cuya ecuación $y' = f(x, y)$ es a variable separable.

Modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra

Modelización. Sea y la cantidad de individuos de una especie depredadora e x de una especie que es presa de y . Veamos cómo podemos construir un modelo de evolución ecológica:

- Si la presa no tiene depredadores, su cantidad evoluciona según el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a > 0)$$

- Si el depredador no tiene presa para comer, su cantidad (decreciente por hambre) evoluciona según el modelo:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad (c > 0)$$

A partir de este análisis, podemos considerar el sistema *depredador-presa* en la interacción entre ambas especies

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

1. Puntos Críticos. Los puntos de equilibrio ecológico son fáciles de obtener: $(0, 0)$ y $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

2. Linealización. La linealización entorno al origen es trivial, ya que es el modelo desacoplado. La presa crece exponencialmente y el predador decrece exponencialmente

La linealización entorno al punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ define el sistema (llamando $u = x - \frac{c}{d}$ y $v = y - \frac{a}{b}$):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d} v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{b} u \end{cases}$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + ac = 0$, y como a y c son positivos, tenemos $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$ y como son imaginarios puros, tendremos que entorno al punto de equilibrio la solución es periódica. Es decir, que este estado de equilibrio se podría llamar de sustentable

Método del Producto Directo. Plano de Fase

Si consideramos el sistema completo, sin simplificaciones, tenemos (recordemos que todos los coeficientes son positivos)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a x - b x y = x(a - b y) \\ \frac{dy}{dt} = -c y + d x y = y(-c + d x) \end{cases}$$

Dividiendo a ambos miembros, obtenemos la ecuación geométrica en el plano de fase

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(a - b y)} \frac{(-c + d x)}{x} \quad \text{variables separables!}$$

$$\frac{a - b y}{y} dy = \frac{(-c + d x)}{x} dx$$

Entonces,

$$a \ln(y) - b y + c \ln(x) - d x = C \quad (C \text{ cerrada! comprobar})$$

Especies Competidoras

De la misma manera con la que analizamos el modelo predador-presa podemos estudiar el problema en el cual dos especies compiten por el mismo alimento (esto puede ser también llevado al contexto de la economía, por ejemplo)

El sistema de ecuaciones que modeliza este problema es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \end{cases}$$

donde los parámetros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ son todos positivos.

De manera análoga a los estudiado para el modelo de predador-presa, podemos comenzar con los puntos críticos, estudiar la dinámica en la vecindad de estos puntos, etc.

Como ejemplo, dejamos para estudiar

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x\right) \end{cases}$$

Integrales Primeras (Muy introductorio)

Consideremos un problema con $n = 2$, es decir, de dos ecuaciones

diferenciales con dos incógnitas $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$ Notemos que si

multiplicamos la primera ecuación por $Q(x, y)$ y la segunda por $P(x, y)$ y restamos obtenemos

$$P(x, y) \frac{dy}{dt} - Q(x, y) \frac{dx}{dt} = 0$$

Si la ecuación es, además, exacta, es decir que existe una función $H(x, y)$, tal que

$$P(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad Q(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$$

podemos obtener

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dH(x, y)}{dt} = 0 \implies H(x, y) = Cte$$

Integrales Primeras y Sistemas Hamiltonianos

Al encontrar la función H , encontramos una función de las dos variables (que evolucionan según el sistema de ecuaciones diferenciales) decimos que H es una integral primera del sistema.

En general, para un sistema de dimensión n una *integral primera* es una relación de todas las variables que se mantiene constante. Notemos que por cada integral primera, podemos reducir en una "dimensión" el sistema original.

Volviendo al caso donde encontramos la integral primera $H(x, y) = Cte$, encontramos que las ecuaciones diferenciales pueden escribirse a partir de la propia función H ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se denomina **Ecuaciones de Hamilton** las cuales surgen del estudio de la *Mecánica Clásica* y son de amplia aplicación en la *Mecánica Celeste*

- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer (1992)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)

Clase Número 9

Ecuaciones de 2do Orden

con

Coeficientes Variables

- Definición de Punto Ordinario
- Soluciones en Serie. Análisis de Convergencia
- Definición de Puntos Singulares Regulares.
- Ecuación de Euler.

Punto Ordinario. Definición

Definición. Punto Ordinario. Dada una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} y^{(n-1)}(x) + \dots + \frac{a_0(x)}{a_n(x)} y(x) = 0$$

Diremos que x_0 es un punto ordinario si y sólo si las funciones

$$\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)}, \dots, \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$$

son analíticas en x_0 .

La solución analítica será buscada en serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

La convergencia de las series está garantizada por la analiticidad de los coeficientes

Soluciones en Series

La solución de la ecuación diferencial la buscamos proponiendo una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} x^{\ell}$$

Si x_0 es un punto ordinario, buscaremos la solución mediante

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} (x - x_0)^{\ell}$$

$$y'(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell c_{\ell} (x - x_0)^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) c_{\ell+1} (x - x_0)^{\ell}$$

$$y''(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell(\ell - 1) c_{\ell} (x - x_0)^{\ell-2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 2)(\ell + 1) c_{\ell+2} (x - x_0)^{\ell}$$

Será necesario siempre el arreglo de coeficientes y ordenamiento en potencias de x

Intervalo de Convergencia

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

para la cual, x_0 es un punto ordinario.

Tendremos una solución en serie,

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} (x - x_0)^{\ell}$$

Dónde esperamos convergencia de esta serie?

Hay que pensar en el plano complejo, no en la recta real

El radio de convergencia de la serie será

$$|x - x_0| < \rho$$

donde ρ es la distancia a la singularidad más próxima (en el plano complejo!)

Ejemplo

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + \frac{1}{1+x^2} y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0$$

Notemos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial.

El desarrollo

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\ell}$$

Teniendo en cuenta que los puntos de singularidad son $x = 1/2$ y $x = \pm i$ debemos calcular la distancia entre $x = 1/2$ (**en complejos!**) y el mínimo será el radio de convergencia del desarrollo.

Tenemos que $\rho_1 = \frac{1}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = 0$) y $\rho_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = \pm i$). Entonces, como $\rho_1 < \rho_2$ la solución en serie tendrá un radio de convergencia

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Busquemos una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0$$

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} x^{\ell} \quad \rightarrow \quad y''(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)c_{\ell+2} x^{\ell}$$

Al reemplazar en la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \{(\ell+2)(\ell+1)c_{\ell+2} + c_{\ell}\} x^{\ell} = 0$$

Genera la recurrencia

$$c_{\ell+2} = \frac{-1}{(\ell+2)(\ell+1)} \Rightarrow c_{2j} = c_0 \frac{(-1)^j}{(2j)!} \quad \text{y} \quad c_{2j+1} = c_1 \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}$$

Entonces

$$y(x) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$$

Definición. Punto Singular Regular. *Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma*

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

Diremos que x_0 es un punto singular regular si y sólo si las funciones

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad y \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

son analíticas en x_0 .

La definición no es caprichosa, sino que estará relacionada con la *Ecuación de Euler*

Ecuación de Euler

Consideremos la ecuación diferencial

$$x^2 y''(x) + \alpha x y'(x) + \beta y(x) = 0$$

donde α y β son números reales.

Notemos que para esta ecuación, $P(x) = x^2$, $Q(x) = \alpha x$ y $R(x) = \beta$.

Además, $x = 0$ es un punto singular regular

Fijemonos que la ecuación de Euler es satisfecha por una función potencial, ya que si proponemos $y(x) = x^r$

- $x^2 y''(x) = r(r-1)x^r$
- $\alpha x y'(x) = \alpha r x^r$
- $\beta y(x) = \beta x^r$

Con lo cual, al reemplazar en la ecuación diferencial, nos queda

$$[r^2 + (\alpha - 1)r + \beta] x^r = 0$$

Entonces, la potencia la obtenemos resolviendo la **Ecuación Indicial**

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

Soluciones posibles

La ecuación indicial, pensada en el campo de los complejos, admite como posibilidades:

- $r_1 \neq r_2$
- $r_1 = r_2$

Caso $r_1 \neq r_2$

Para este caso, la solución general de la ecuación de Euler, será

$$y(x) = a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2}$$

Caso $r_1 = r_2$

Al tener la ecuación indicial dos raíces iguales, el polinomio se puede escribir $(r - r_1)^2$. Entonces al sustituir en la ecuación diferencial, tenemos

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta \right] x^r = (r - r_1)^2 x^r$$

que vale cero al evaluar en $r = r_1$

Búsqueda de la solución Linealmente Independiente

En notación de operadores,

$$L : \frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta \implies L[x^r] = (r - r_1)^2 x^r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \{L[x^r]\} = L \left\{ \frac{\partial x^r}{\partial r} \right\}$$

Entonces, como

$$\frac{\partial}{\partial r} [(r - r_1)^2 x^{r_1}] = 2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|)$$

tenemos

$$2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|) = L[x^r \ln(|x|)]$$

que será cero en $r = r_1$ Entonces, las solución general es

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln|x^{r_1}|$$

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* .
<http://fcaglp.unlp.edu.ar/~nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf>.
(2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

Clase Número 10

Método de Frobenius

- Método de Frobenius
- Construcción de Soluciones
 - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia no entera
 - Ecuación Indicial con raíces iguales
 - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia entera
- Punto en el Infinito

Método de Frobenius

Consideremos ahora, una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

Si x_0 es un punto singular regular. Dividiendo a ambos miembros por $P(x)$ y multiplicando a ambos miembros por x^2 obtenemos

$$x^2 y''(x) + x^2 \frac{Q(x)}{P(x)} y'(x) + x^2 \frac{R(x)}{P(x)} y(x) = 0$$

o equivalentemente

$$x^2 y''(x) + x \left[x \frac{Q(x)}{P(x)} \right] y'(x) + \left[x^2 \frac{R(x)}{P(x)} \right] y(x) = 0$$

Como x_0 es un punto singular regular, $\left[x \frac{Q(x)}{P(x)} \right]$ y $\left[x^2 \frac{R(x)}{P(x)} \right]$ son analíticas, por lo que tenemos para ambas funciones desarrollo de Taylor

Para las funciones entre corchetes tenemos series de Taylor convergentes alrededor de $x = 0$,

$$\left[x \frac{Q(x)}{P(x)} \right] = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$
$$\left[x^2 \frac{R(x)}{P(x)} \right] = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación diferencial, tenemos

$$x^2 y''(x) + x [\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots] y'(x) + [\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots] y(x) = 0$$

distribuyendo el primer término

$$x^2 y''(x) + \alpha_0 x y'(x) + x [\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots] y'(x) + \beta_0 y(x) + [\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots] y(x) = 0$$

Reagrupando, tenemos

$$\underbrace{x^2 y''(x) + \alpha_0 x y'(x) + \beta_0 y(x)}_{\text{Euler}} + [\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots] y'(x) + [\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots] y(x) = 0$$

Método de Frobenius. Propuesta de Solución

El hecho de que un primer término sea la ecuación de Euler, sugiere y motiva a buscar soluciones en serie para la ecuación diferencial (ahora, la completa) en la forma

$$y(x) = x^r \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} x^{\ell}$$

donde r sea solución de la ecuación indicial $r^2 + (\alpha_0 - 1)r + \beta_0$

Casos Posibles. Soluciones Generales

Caso $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

$$y(x) = \lambda_1 x^{r_1} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell}^{(r_1)} x^{\ell} \right] + \lambda_2 x^{r_2} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell}^{(r_2)} x^{\ell} \right]$$

donde los coeficientes $c_{\ell}^{(r_1,2)}$ se obtienen a partir de la expresión, para $c_0^{(r_1,2)} = 1$

$$c_{\ell}^{(r_1,2)} = -\frac{1}{p(\ell + r_{1,2})} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}^{(r_1,2)} [\alpha_j (\ell + r_{1,2} - j) + \beta_j], \quad p \text{ es el polinomio indicial} \quad \ell = 1, 2, \dots$$

Método de Frobenius. Propuesta de Solución

Caso $r_1 = r_2$

Para este caso, notemos primero que $L[y_r(x)] = p(r)x^r = (r - r_1)^2 x^r$. Con lo cual, tendremos que

$$L \left[\frac{\partial y_r(r)}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_1} = 0$$

Entonces, la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = x^{r_1} \left\{ \ln|x| \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell}^{(r_1)} x^{\ell} \right] + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{dc_{\ell}^{(r_1)}}{dr_1} \right\}$$

Caso $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

$$y(x) = y_{r_2}(x) [\lambda_2 + \lambda_1 \ln|x|] + x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_{\ell}(r_1)}{dr} x^{\ell}$$

con λ_1 y λ_2 constantes arbitrarias.

Este caso requiere un análisis minucioso respecto a los coeficientes (ver Miloni, 2015)

Estudiamos la ecuación diferencial

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

pero en la variable $\zeta = \frac{1}{x}$

Para que el punto en el infinito sea un punto singular regular, es equivalente a que $\zeta = 0$. La condición será que

$$\frac{1}{\bar{P}(\zeta)} \left[\frac{2}{\zeta^2} \bar{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \bar{Q}(\zeta) \right] \quad y \quad \frac{1}{\zeta^2} \frac{\bar{R}(\zeta)}{\bar{P}(\zeta)}$$

sean analíticas en $\zeta = 0$

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* .
<http://fcaglp.unlp.edu.ar/nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf>.
(2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

Clase Número 11

Ecuaciones Fuchsianas

Ecuación de Riemann-Papperitz

- Construcción de Ecuaciones Fuchsianas
- Ecuación de Riemann-Papperitz
- Ecuación Hipergeométrica
- Ecuación Hipergeométrica Confluente

Definición. Una ecuación diferencial de segundo orden se denomina **Fuchsianas** si **todos sus puntos singulares son regulares**

En esta clase vamos a construir ecuaciones Fuchsianas

Propiedad. Las ecuaciones Fuchsianas son invariantes por transformaciones de *Möbius*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Construcción de Ecuaciones Fuchsianas

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares finitos

$$y''(x) + \left[\frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} \right] y'(x) + \left[\frac{\beta_1(x_1 - x_2)}{x - x_1} + \frac{\beta_2(x_2 - x_1)}{x - x_2} \right] \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} y(x) = 0$$

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares. Uno en el $x = 0$ y otro en el infinito

$$z^2(z - 1) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + (a + z b) z \frac{dy(z)}{dz} + (c + z d) y(z) = 0$$

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente tres puntos singulares regulares finitos

$$y''(x) + \left[\frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \frac{\alpha_3}{x - x_3} \right] y'(x) + \left[\frac{\beta_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}{x - x_1} + \frac{\beta_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}{x - x_2} + \frac{\beta_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{x - x_3} \right] \frac{y(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = 0$$

La Ecuación de Riemann-Papperitz

La ecuación de Riemann-Papperitz es una ecuación Fuchsiana con tres puntos singulares finitos donde además el punto en el infinito es también singular regular

$$y''(x) + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right] y'(x) + \left[\frac{\alpha \alpha' (a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta \beta' (b - a)(b - c)}{x - b} + \frac{\gamma \gamma' (c - a)(c - b)}{x - c} \right] \frac{y(x)}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0$$

donde $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ son las raíces de la ecuación indicial asociada a cada singularidad.

con la condición de *Riemann*

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

Notación para la Solución de la Ecuación de Riemann-Papperitz

Dada la ecuación de Riemann-Papperitz

$$y''(x) + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right] y'(x) + \left[\frac{\alpha \alpha' (a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta \beta' (b - a)(b - c)}{x - b} + \frac{\gamma \gamma' (c - a)(c - b)}{x - c} \right] \frac{y(x)}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0$$

Denotamos la solución

$$y(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} \quad x \right\}$$

$$(x - a)^{\ell_1}(x - b)^{\ell_2}(x - c)^{\ell_3} P \left\{ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} =$$
$$= P \left\{ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \alpha + \ell_1 & \beta + \ell_2 & \gamma + \ell_3 & x \\ \alpha' + \ell_1 & \beta' + \ell_2 & \gamma' + \ell_3 & \end{array} \right\}$$

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* .
<http://fcaglp.unlp.edu.ar/nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf>.
(2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

Clase Número 12 y 13

Ecuación Hipergeométrica

Funciones Especiales I

- Repaso de la Ecuación de Riemann-Papperitz
- Propiedades
- Función Hipergeométrica. Ecuación Hipergeométrica
- Relaciones Contiguas. Recurrencias
- Polinomios de Jacobi. Fórmula de Recurrencia. Fórmula de Rodrigues
- Polinomios de Gegenbauer. Polinomios de Legendre

La Ecuación de Riemann-Papperitz. Repaso

La ecuación de Riemann-Papperitz es una ecuación Fuchsiana con tres puntos singulares finitos donde además el punto en el infinito sea un punto ordinario

$$y''(x) + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right] y'(x) + \left[\frac{\alpha \alpha' (a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta \beta' (b - a)(b - c)}{x - b} + \frac{\gamma \gamma' (c - a)(c - b)}{x - c} \right] \frac{y(x)}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0$$

donde $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ son las raíces de la ecuación indicial asociada a cada singularidad. Que el infinito sea punto ordinario, impone la *condición de Riemann*

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

Notación para la Solución de la Ecuación de Riemann-Papperitz

Dada la ecuación de Riemann-Papperitz

$$y''(x) + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right] y'(x) + \left[\frac{\alpha \alpha' (a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta \beta' (b - a)(b - c)}{x - b} + \frac{\gamma \gamma' (c - a)(c - b)}{x - c} \right] \frac{y(x)}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0$$

con la condición de *Riemann*, $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$.

La solución se denota (Whittaker & Watson)

$$y(x) = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\}$$

$$(x - a)^{\ell_1}(x - b)^{\ell_2}(x - c)^{\ell_3} P \left\{ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} =$$
$$= P \left\{ \begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ \alpha + \ell_1 & \beta + \ell_2 & \gamma + \ell_3 & \\ \alpha' + \ell_1 & \beta' + \ell_2 & \gamma' + \ell_3 & \end{array} \right\}$$

La demostración es muy larga y se puede extender simplemente de la consideración del caso Euler

Función Hipergeométrica. Ecuación Hipergeométrica

Presentación. Definición.

$${}_2F(a, b; c; z) = 1 + \frac{a b}{c} \frac{z^1}{1!} + \frac{a(a+1) b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2) b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

recibe el nombre de *serie de Gauss* o *serie hipergeométrica*. Podemos notar que c no puede ser un entero negativo, ya que en algún término se anularía el denominador.

Además, si a o b es un entero negativo, la serie es en realidad un polinomio, ya que se anula en alguno de sus términos.

Por ejemplo, de manera directa se puede obtener ${}_2F(a, -3; c; z)$ se puede escribir

$$\begin{aligned} {}_2F(a, -3; c; z) &= 1 - 3 \frac{a}{c} \frac{z^1}{1!} + 6 \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} - 6 \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} \\ &= 1 - 3 \frac{a}{c} \frac{z^1}{1!} + 3 \frac{a(a+1)}{c(c+1)} z^2 - \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} z^3 \end{aligned}$$

Relación de la Serie Hipergeométrica con Funciones Trascendentes

Es interesante resaltar:

i)

$${}_2F(-n, b; b, -z) = (1 + z)^n$$

ii)

$${}_2F(1, 1; 2, -z) = \frac{\ln(1 + z)}{z}$$

iii)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} {}_2F(1, \lambda; 1, \frac{z}{\lambda}) = e^z$$

iv)

$${}_2F(1/2, 1; 3/2; z^2) = \frac{\arctan(z)}{z}$$

- $${}_2F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\text{Gauss})$$

- $$\frac{d}{dz} [{}_2F(a, b; c; z)] = \frac{ab}{c} {}_2F(a+1, b+1; c+1; z)$$

- $${}_2F(-n, b; c; 1) = \frac{n!}{(c)_n} \int_0^1 t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1}(1-tz)^{-b} dt \quad (\text{Euler})$$

Ecuación Diferencial Hipergeométrica

Uno de los mayores avances en el estudio de las funciones hipergeométricas, fue hecho por el matemático prusiano Ernst Kummer (1816-1893) quien descubrió que la función hipergeométrica es solución de la ecuación diferencial

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + [c - (1+a+b)z] \frac{dy}{dz} - abz = 0$$

Notemos que podemos escribir esta ecuación diferencial como

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[z \frac{d}{dz} + c - 1 \right] - \left[z \frac{d}{dz} + a \right] \left[z \frac{d}{dz} + b \right] \right\} y(z) = 0$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial $y(z) = {}_2F(a, b; c; z)$ verificamos que se cumple la igualdad.

Relación Ecuación Hipergeométrica con Ecuación de Riemann-Papperitz

Si en la Ecuación de Riemann-Papperitz efectuamos el cambio de variables

$$z = \frac{(c - b)(x - a)}{(c - a)(x - b)}$$

Notamos esta transformación asigna nuevos puntos singulares regulares $a \rightarrow 0$, al $b \rightarrow \infty$ y al $c \rightarrow 1$, lo que transforma la ecuación diferencial en otra cuya solución se puede denotar

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \beta + \alpha + \gamma & 0 \\ \alpha' - \alpha & \beta' + \alpha + \gamma & \gamma' - \gamma \end{array} z \right\}$$

Relación Riemann-Papperitz, Ecuación Hipergeométrica

Si llamamos $A = \beta + \alpha + \gamma$, $B = \beta' + \alpha + \gamma$ y $C = 1 + \alpha - \alpha'$ la ecuación se puede escribir

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [C - (1+A+B)z] \frac{dy}{dz} - ABz = 0$$

Lo que implica que podemos relacionar la ecuación de Riemann-Papperitz con la ecuación hipergeométrica

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \middle| x \right\} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)} \right]^\alpha \left[\frac{(x-c)}{(x-b)} \right]^\gamma P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & \beta + \alpha + \gamma & 0 \\ \alpha' - \alpha & \beta' + \alpha + \gamma & \gamma' - \gamma \end{matrix} \middle| x \right\} \\ &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)} \right]^\alpha \left[\frac{(x-c)}{(x-b)} \right]^\gamma P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & A & 0 \\ 1-C & B & C-A-B \end{matrix} \middle| x \right\} \end{aligned}$$

Llamando $z = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}$ obtenemos

$$P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \middle| x \right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)} \right]^\alpha \left[\frac{(x-c)}{(x-b)} \right]^\gamma P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & A & 0 \\ 1-C & B & C-A-B \end{matrix} \middle| z \right\}$$

$$P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right. x \left. \right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)} \right]^\alpha \left[\frac{(x-c)}{(x-b)} \right]^\gamma {}_2F_1 \left(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma; 1 + \alpha - \alpha'; \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)} \right)$$

Soluciones de Kummer

En 1836 Ernst Kummer encontró que la ecuación de Riemann-Papperitz admite 24 representaciones diferentes utilizando funciones hipergeométricas. Estas representaciones se denominan *soluciones de Kummer*. Cada función de Kummer es solución de la ecuación de Riemann-Papperitz

$$y''(x) + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c} \right] y'(x) + \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c} \right] \frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0$$

Relaciones Contiguas de las Funciones Hipergeométricas

A partir de la función hipergeométrica, vamos a estudiar las transformaciones denominadas contiguas y ellas son las definidas a través de ${}_2F(a \pm 1, b; c; z)$, ${}_2F(a, b \pm 1; c; z)$ y ${}_2F(a, ; c \pm 1; z)$ entonces,

$${}_2F(a+1, b; c; z) = {}_2F(a, b; c; z) + \frac{\Gamma(c)}{(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)} \frac{z^\ell}{\ell!}$$

De manera análoga, podemos obtener

$${}_2F(a-1, b; c; z) = \frac{a\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(a+\ell)} \frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)} \frac{z^\ell}{\ell!}$$

Con estas dos expresiones podemos llegar mediante cálculo directo a la *relación contigua*

$$(c-a) {}_2F(a-1, b; c; z) + [2a-c-(a-b)z] {}_2F(a, b; c; z) + a(z-1) {}_2F(a+1, b; c; z) = 0$$

Dado que la definición de la función hipergeométrica establece una simetría entre a y b (son intercambiables, ${}_2F(a, b; c; z) = {}_2F(b, a; c; z)$) tenemos otra relación contigua por simple intercambio entre a y b

$$(c-b) {}_2F(a, b-1; c; z) + [2b-c-(b-a)z] {}_2F(a, b; c; z) + b(z-1) {}_2F(a, b+1; c; z) = 0$$

Ecuación de Jacobi. Polinomios de Jacobi

Cuando estudiamos las funciones hipergeométricas notamos que si a o b es un entero negativo por ejemplo $-n$ (con n natural) la serie queda truncada y resulta un polinomio de grado n .

Consideremos entonces la ecuación hipergeométrica con las siguientes particularidades: $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$ y $c = \alpha + 1$. La ecuación queda modificada

$$z(1-z)y''(z) + [1 + \alpha - (\alpha + \beta + 2)z]y'(z) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(z) = 0$$

Ahora, cambiemos la variable $z = \frac{1-x}{2}$, obtenemos la denominada *ecuación de Jacobi*

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\frac{d}{dx}y(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada α y β la solución de esta ecuación que satisfaga la condición

$$P_n^{\alpha \beta}(1) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!}$$

son los denominados *Polinomios de Jacobi*. Con esta condición, la relación entre los polinomios de Jacobi y la función hipergeométrica asociada será

$$P_n^{\alpha \beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

Relación de Recurrencia

Dada la relación entre los polinomios de Jacobi y las función hipergeométrica, podemos aplicar las relaciones contiguas para establecer relaciones entre polinomios de Jacobi de distintos grados, que luego serán de utilidad para los casos particulares que nos serán de interés.

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + 2n + 1)[\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 2)x]P_n^{\alpha\beta}(x) = \\ = & 2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)P_{n+1}^{\alpha\beta}(x) + 2(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)P_{n-1}^{\alpha\beta}(x) \end{aligned}$$

Existen otras relaciones de recurrencia, que vinculan diferentes valores de α y β , las cuales pueden también ser obtenidas a partir de las relaciones contiguas, pero para nuestro propósito no serán desarrolladas aquí, sino que formarán parte de las ejercitaciones.

Los polinomios de Jacobi admiten como función generatriz a

$$g(x, t) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\mathbf{R}} [1 - t + \mathbf{R}]^{-\alpha} [1 + t + \mathbf{R}]^{-\beta}$$

donde

$$\mathbf{R} = \sqrt{1 - 2xt + t^2}$$

de manera tal de que al desarrollar $g(x, t)$ en potencias de t ,

$$g(x, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}^{\alpha\beta}(x) t^{\ell}$$

desarrollo válido para $|t| < 1$

Fórmula de Rodrigues

Además de la función generatriz, los polinomios de Jacobi pueden calcularse directamente a partir de una relación denominada fórmula de Rodrigues la cual viene dada a partir de la expresión

$$P_n^{\alpha\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

A modo de ejemplo, podemos calcular el polinomio $P_1^{\alpha\beta}(x)$, como

$$P_1^{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} [(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}]$$

Entonces,

$$P_1^{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2} (\alpha + 1)(1+x) - (\beta + 1) \frac{1}{2} (1-x)$$

$$P_1^{\alpha\beta}(x) = \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta + 2}{2} x$$

Caso Particular $\alpha = \beta = 0$: Polinomios de Legendre

Ahora, si partimos de la ecuación de Gegenbauer y fijamos $\lambda = \frac{1}{2}$ lo que implicaría en términos de los polinomios de Jacobi $\alpha = \beta = 0$ tenemos la *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - 2x\frac{d}{dx}w(x) + n(n+1)w(x) = 0$$

Cuya solución polinómica y normalizada son los *Polinomios de Legendre*, cuya expresión, en términos de la función hipergeométrica es $P_n(x) = {}_2F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2})$. Dado que los polinomios de Legendre son particularmente interesantes debido a sus diversas aplicaciones, expresemos las diferentes propiedades que los caracterizan.

Consideremos las relaciones de recurrencia que satisfacen los polinomios de Jacobi

- **Relaciones de Recurrencia**. A partir de saber que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$ tenemos $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$
- **Función Generatriz** $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x) t^{\ell}$
- **Fórmula de Rodrigues** $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* .
<http://fcaglp.unlp.edu.ar/nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf>.
(2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)
- Deaño Cabrera, Alfredo. *Tesis Doctoral*, Universidad Carlos III, Madrid, España (2006)
- Slater, Lucy J. *Generalized Hypergeometric Functions*, Ed. Cambridge University Press (1966)

Clase 14

Series de Fourier

Aspectos Algebraicos

- Espacios de Dimensión finita. Coeficientes de Fourier.
- Dimensión Infinita. Convergencia en Media
- Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval
- Ejemplos de Series de Fourier

Espacios Euclídeos. Coeficientes de Fourier

Sea V un espacio euclídeo de dimensión n .

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortogonal de V . Entonces, para $\vec{v} \in V$ tenemos

$$\vec{v} = \alpha^\ell \mathbf{e}_\ell \quad \text{sumando en } \ell \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Multiplicando a ambos miembros por \mathbf{e}_k tenemos

$$\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle = \langle \alpha^\ell \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle = \alpha^\ell \langle \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle$$

Como la base es ortogonal, tenemos que $\langle \mathbf{e}_\ell | \mathbf{e}_k \rangle = \|\mathbf{e}_k\|^2 \delta_{\ell k}$, entonces

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} \mathbf{e}_k \quad \text{sumando en } k \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Lo que significa que

$$\frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$$

son las coordenadas de \vec{v} en la base ortogonal. Estas coordenadas se las denominan **coeficientes de Fourier** de \vec{v} .

Problema: Consideremos un espacio euclídeo V de dimensión n . Sea $\vec{v} \in V$ y sea W un subespacio de V de dimensión m . La pregunta es: Cuál es el vector $\vec{w} \in W$ "más parecido" a \vec{v} ?

Respuesta:

$$\vec{w} = \sum_{\ell=1}^m \langle \vec{v} | \mathbf{e}_\ell \rangle \mathbf{e}_\ell$$

Pistas

- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ una base ortonormal de W
- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormal de V ($n > m$)
- El vector que mejor se aproxima ($\|\vec{v} - \vec{w}\|$ mínimo) será aquel que cumpla (graficar)

$$(\vec{v} - \vec{w}) \perp \vec{w}$$

Espacios de Dimensión Infinita

1. Dado un espacio $W \subset V$ un subespacio V . Sea $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ una base ortogonal de W . Demostrar que dado $\vec{v} \in V$,

$$\left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^m \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \mathbf{e}_i \right\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

para todo $\vec{w} \in W$

2. *Convergencia en Media*. La serie formal $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ se dice que *converge en media* a \vec{v} si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \right\| = 0$$

3. Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ converge en media a un vector \vec{v} , entonces $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle}$.

Pista: Partir de la desigualdad del punto 1. y la convergencia en media de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ a \vec{v}

Desigualdad de Bessel

Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ un conjunto ortonormal de vectores en el espacio euclídeo V , de dimensión infinita. Sea $\vec{v} \in V$. Entonces

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2$$

que es la desigualdad denominada desigualdad de Bessel.

Pista: Partir de

$$0 \leq \left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_i \right\|^2$$

desarrollar el cuadrado (como el producto interno del vector diferencia por sí mismo), comprobando que

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_i \right) \mid \left(\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_j \right) \right\rangle = \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle^2$$

Igualdad de Parseval

Igualdad de Parseval. Asumiendo que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ es una base ortonormal de V , demostrar que se cumple

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{v}\|^2$$

Pista para la demostración: Como se supone que es una base, la serie formal converge en media

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \vec{v} - \sum_{\ell=1}^n \langle \mathbf{e}_\ell | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_\ell \right\|^2 = 0$$

y hacer un razonamiento análogo al hecho en el punto anterior.

Ejercicio. Escribir la Desigualdad de Bessel y la Igualdad de Parseval en el caso que las bases sean ortogonales, no ortonormales.

La Serie de Fourier

1. Considerar en el espacio de funciones continuas a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

2. Demostrar que el conjunto $\{1; \cos(x), \cos(2x), \dots; \sin(x), \sin(2x), \dots\}$ que se denota

$$\{1; \cos(\ell x); \sin(\ell x)\}_{\ell=1,2,3,\dots}$$

es ortogonal.

3. Dada una función continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) = a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_{\ell} \cos(\ell x) + b_{\ell} \sin(\ell x)]$$

Un Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier de la función es,

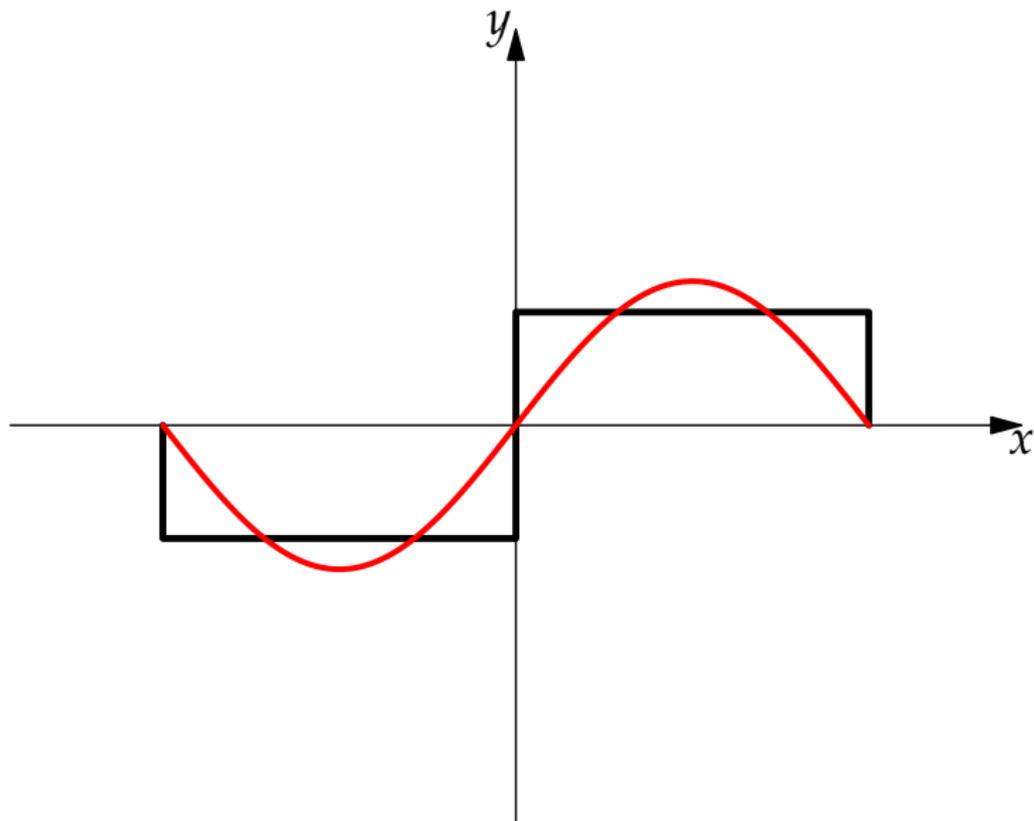
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots \right\}$$

Aplicando la Igualdad de Parseval, se obtiene

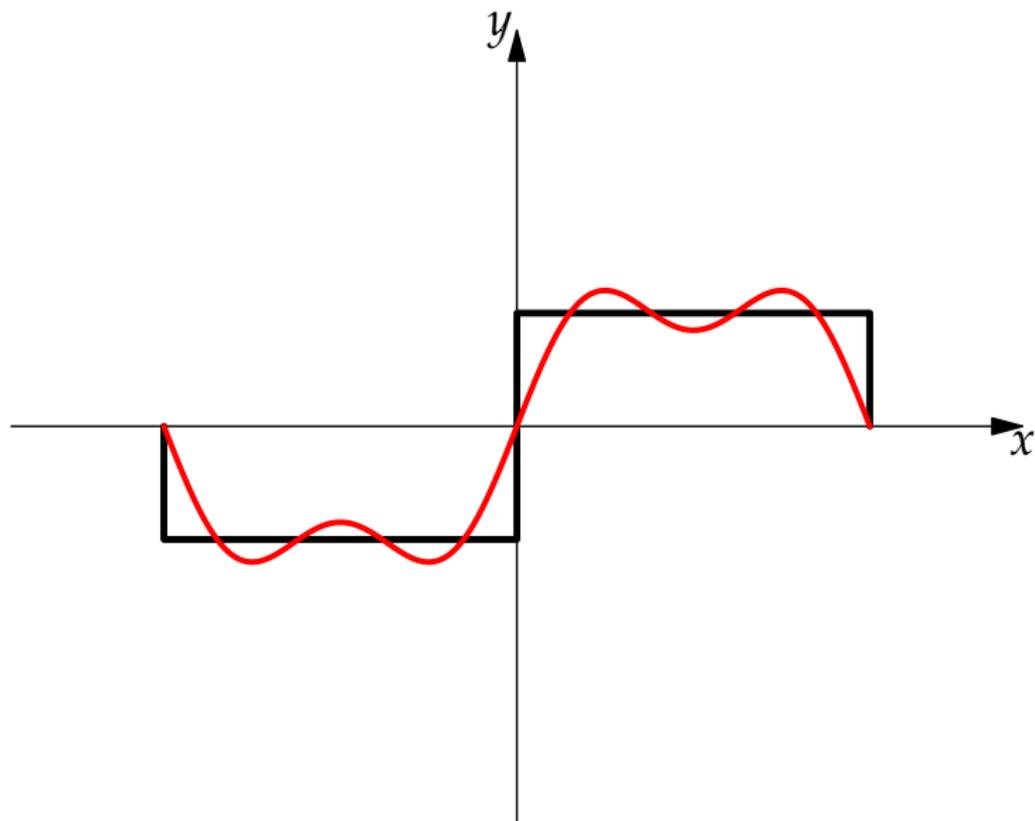
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \dots = \frac{\pi}{8}$$

Con Fourier obtenemos propiedades aritméticas!

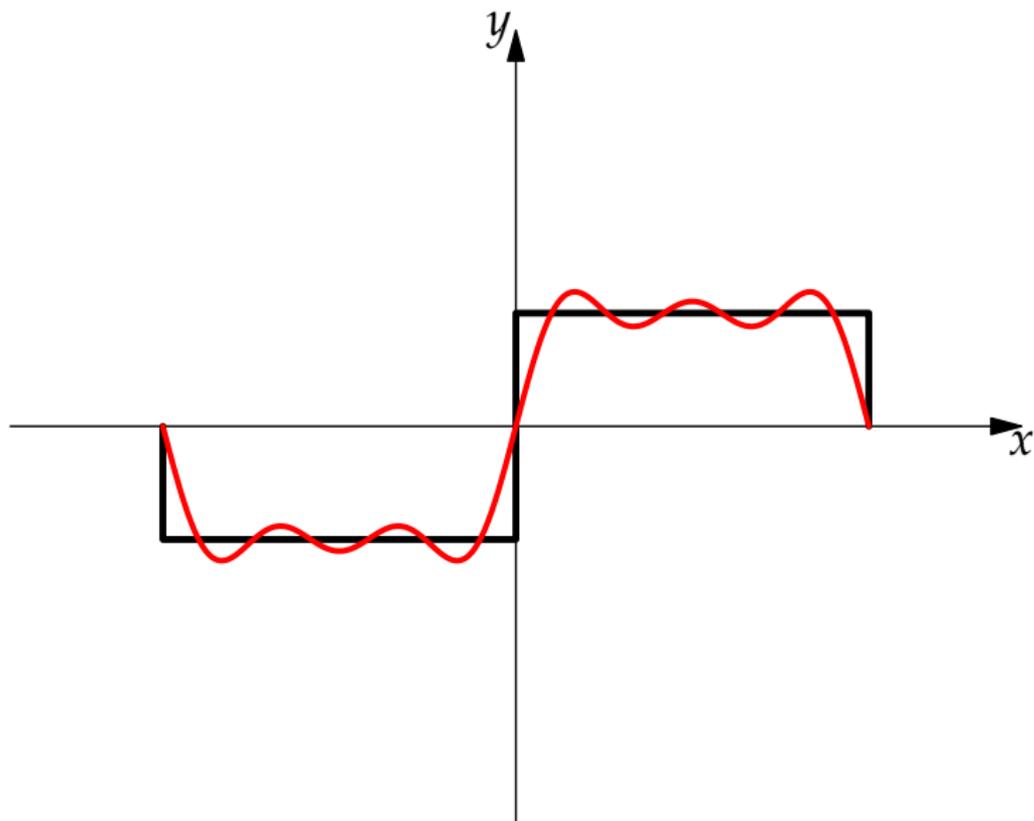
$$n = 1$$



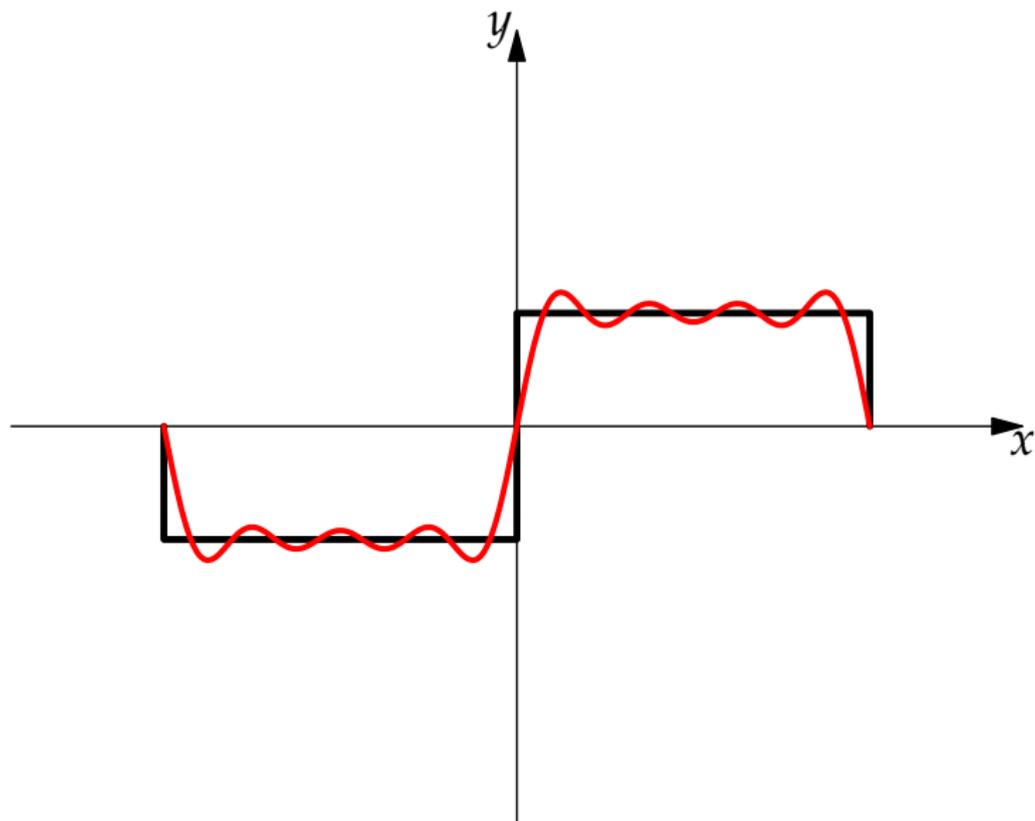
$$n = 3$$



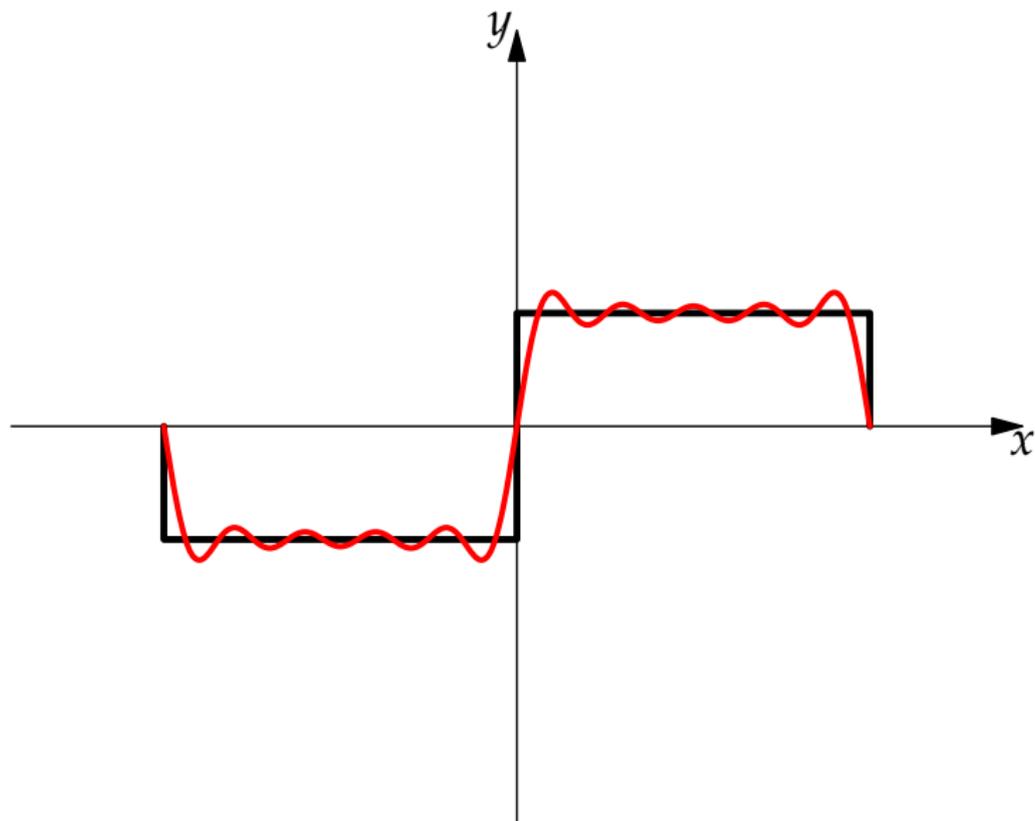
$$n = 5$$



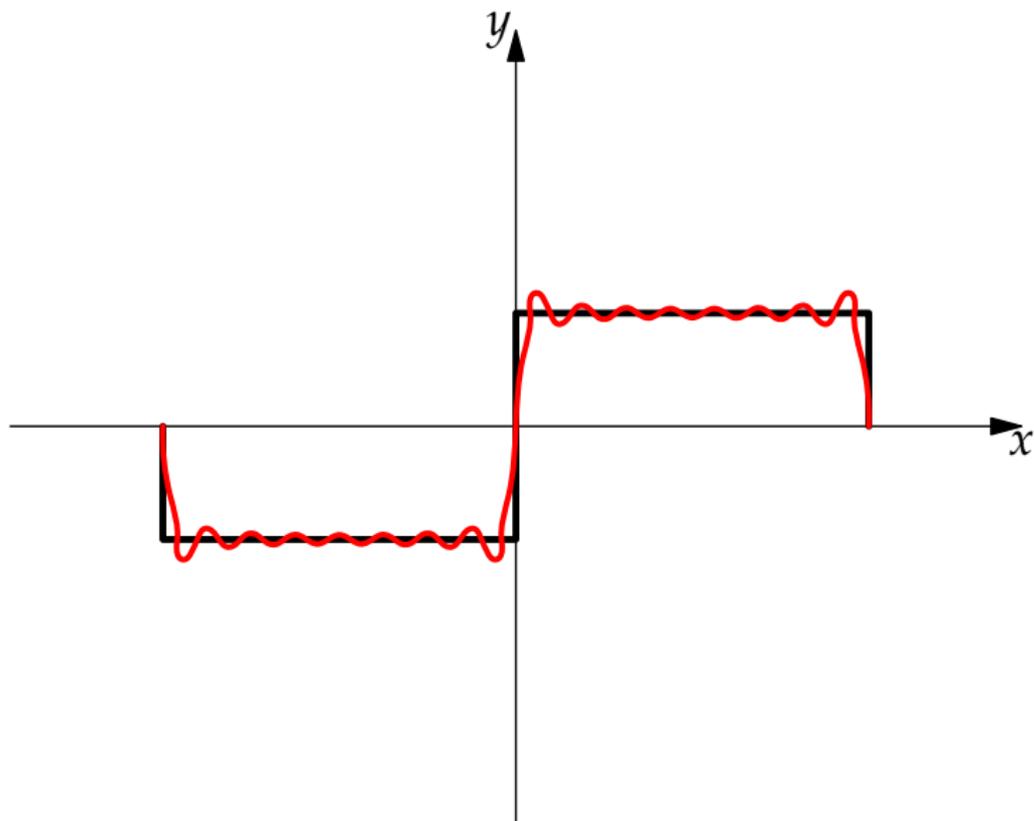
$$n = 7$$



$$n = 9$$



$$n = 15$$



- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve. *Ecuaciones Diferenciales en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Sommerfeld, Arnold. *Partial Differential Equations in Physics*, Ed. Academic Press (1949)

Clase 15

Series de Fourier Convergencia Puntual

- Teorema de Riemann-Lebesgue
- Sumas Parciales
- Teoremas de Fourier

Teorema de Riemann-Lebesgue

En esta clase, el soporte analítico lo provee el

Teorema de Riemann-Lebesgue el cual será aplicado en todos los teoremas de convergencia puntual de las **series de Fourier**

Vayamos al enunciado

Teorema. Riemann-Lebesgue. *Sea $f(x)$ una función continua a trozos en el intervalo $[a, b]$. Entonces se cumple:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = 0$$

El Teorema nos garantiza que si una función $f(x)$ cumple con las condiciones del Teorema

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx + r) dx = 0$$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue

Vamos a demostrar que el límite de la integral con el $\sin(kx)$, ya que la demostración es análoga para el otro límite.

Ya que la función $f(x)$ es continua a trozos, podemos subdividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos en los cuales la función es continua, y consideraremos como el valor de $f(x)$ en los extremos como el límite de la función desde la derecha o izquierda, según el extremo (límite por derecha para el extremo menor y por izquierda en el otro caso)

Entonces, basta con considerar el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_p^q f(x) \sin(kx) dx$$

donde $[p, q]$ es uno de los subintervalos de continuidad de $f(x)$

Asimismo, dividamos la integral en n subintervalos equiespaciados

$p = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = q$ con lo que podemos expresar

$$\int_p^q f(x) \sin(kx) dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} f(x) \sin(kx) dx$$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue *continuación*

La integral

$$\int_p^q f(x) \sin(kx) dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} f(x) \sin(kx) dx$$

la podemos escribir también como

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \left\{ f(x_\ell) \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \sin(kx) dx + \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} [f(x) - f(x_\ell)] \sin(kx) dx \right\}$$

Tenemos que la primera integral es de integración inmediata

$$f(x_\ell) \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \sin(kx) dx = -f(x_\ell) \frac{\cos(x_{\ell+1}) - \cos(x_\ell)}{k}$$

Para la segunda integral, podemos ver que la misma está acotada por el valor absoluto de $|f(x) - f(x_\ell)|$

Demostración del Teorema de Riemann-Lebesgue *continuación*

Entonces, tenemos que el valor absoluto lo podemos acotar

$$\left| \int_p^q f(x) \sin(kx) dx \right| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} |f(x_\ell)| \left| \frac{\cos(x_{\ell+1}) - \cos(x_\ell)}{k} \right| + \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} |f(x) - f(x_\ell)| dx$$

Si M es el máximo de la función en el intervalo $[p, q]$ podemos acotar:



$$\sum_{\ell=0}^{n-1} |f(x_\ell)| \left| \frac{\cos(x_{\ell+1}) - \cos(x_\ell)}{k} \right| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2M}{k} = \frac{2Mn}{k}$$

- Como f es continua en cada subintervalo, tenemos $|f(x) - f(x_\ell)| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_\ell| < \delta$. Entonces

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} |f(x) - f(x_\ell)| dx < \varepsilon (q - p)$$

Si ahora definimos $\varepsilon' = 2\varepsilon(q - p)$ y para un valor fijo n elegimos un k suficiente grande de manera tal que $\frac{2Mn}{k} < \frac{\varepsilon'}{2}$ tenemos que probamos el teorema.

Los denominados **Teoremas de Fourier** son los resultados que garantizan la convergencia puntual de las Series de Fourier en los diferentes escenarios para la función a desarrollar, $f(x)$:

- La función $f(x)$ es continua y derivable en todo el intervalo
- La función $f(x)$ es continua pero no derivable en un conjunto finito de puntos del intervalo
- La función $f(x)$ es discontinua en un número finito de puntos del intervalo

Preparación. Sumas Parciales

Consideremos una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ la sumas parciales de Fourier son

$$S_n = a_0 + \sum_{\ell=1}^n [a_{\ell} \cos(\ell x) + b_{\ell} \sin(\ell x)]$$

donde, escribiendo la expresión para los coeficientes, tenemos

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{\ell=0}^n \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\ell t) dt \right] \cos(\ell x) + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\ell t) dt \right] \sin(\ell x) \right\}$$

Regrupando podemos escribir

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t - x) dt$$

con

$$K_n(t - x) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^n \cos[\ell(t - x)]$$

Propiedades de la función $K_n(t - x)$

De la definición de la función

$$K_n(t - x) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^n \cos[\ell(t - x)]$$

podemos demostrar las siguientes propiedades



$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t - x) dt = \pi$$



$$K_n(t - x) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]}$$

La primera propiedad es inmediata a partir de la definición.
Para demostrar la segunda, notemos que

$$\sin \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right] - \sin \left[\left(\ell - \frac{1}{2} \right) (t - x) \right] = 2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right] \cos(\ell(t - x))$$

Entonces,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt$$

Caso I: Funciones Continuas y Derivables

La suma parcial es

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt$$

En el integrando sumemos y restemos $f(x)$, en la forma:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x) + f(x)] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt$$

La integral la podemos dividir como

$$S_n(x) = \underbrace{\frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt}_{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dt = \pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x)] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x)] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right]}{\frac{\sin \left[\frac{1}{2} (t - x) \right]}{\frac{1}{2} (t - x)}} dt$$

En la segunda integral podemos aplicar Riemann-Lebesgue (**discutirlo**). Al tomar límite, sólo es no nulo el primer término, dando $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$

Caso II: Funciones Continuas y no Derivables

Escribamos nuevamente la expresión de la suma parcial para un punto de discontinuidad de la derivada, x_0 ,

$$S_n(x_0) = \frac{f(x_0)}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x_0) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x_0) \right]} dt}_{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x_0) dt = \pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x_0)] \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x_0) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x_0) \right]} dt$$

Vamos a pedir que si bien la función no es derivable en algunos puntos, sí posee límites laterales para la derivada, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'^{(+)}(x_0)$$

y lo propio para $f'^{(-)}(x_0)$

Entonces, si en la segunda integral de la suma parcial dividimos la integración según los puntos de discontinuidad de la derivada y teniendo en cuenta que existen los límites laterales podemos aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0)$ en cualquier punto de discontinuidad de la derivada.

Caso III: Funciones con discontinuidades

Consideremos x_0 un punto de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma parcial nuevamente será

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x_0) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (t - x_0) \right]} dt$$

y dividamos la integral en el punto de discontinuidad

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0} f(t) K_n(t - x_0) dt + \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\pi} f(t) K_n(t - x_0) dt$$

Calculemos la primera integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0} f(t) K_n(t - x_0) dt = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0 - \varepsilon} f(t) K_n(t - x_0) dt}_{\rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{Riemann-Lebesgue})} + \frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} [f(t) - f(x_0^-) + f(x_0^-)] K_n(t - x_0) dt$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} [f(t) - f(x_0^-) + f(x_0^-)] K_n(t - x_0) dt = \frac{f(x_0^-)}{2}$$

usando que $\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} K_n(t - x_0) dt = \frac{\pi}{2}$

De manera análoga, tenemos

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\pi} f(t) K_n(t - x_0) dt = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} [f(t) - f(x_0^+) + f(x_0^+)] K_n(t - x_0) dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{x_0+\varepsilon}^{\pi} f(t) K_n(t - x_0) dt}_{\rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow \infty \text{ (Riemann-Lebesgue)}}$$

Resultando

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\pi} f(t) K_n(t - x_0) dt = \frac{f(x_0^+)}{2}$$

Entonces, sumando las dos integrales obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^-)}{2} + \frac{f(x_0^+)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Lo que indica que en los puntos de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio del salto de la discontinuidad

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve. *Ecuaciones Diferenciales en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)

Clase 16

Transformada de Fourier

- Forma Compleja de la Serie de Fourier
- El Salto al Continuo
- Transformada de Fourier
- Propiedades

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Dada la serie de Fourier de una función continua a trozos en el intervalo $[-L, L]$

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \right\} 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right) dt \right\} \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right) \\ + \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right) dt \right\} \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

Expresando el coseno y el seno en forma exponencial podemos escribir

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}$$

con

$$c_{\ell} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t} dt$$

El salto al continuo

Asumamos que la función $f(x)$ es tal que existe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$.
Vamos, de manera heurística, a construir la *Transformada de Fourier* extendiendo el intervalo $[-L, L]$ a toda la recta real y pasando de la sumatoria a la integral.

Para este propósito consideremos **el paso de las sumas de Riemann a la integral**

$$\sum_{\ell} f(x_{\ell}) \Delta x_{\ell} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Para ello, comencemos con la expresión

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i \frac{\ell \pi}{L} x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\ell}}{\Delta \ell} e^{i \frac{\ell \pi}{L} x} \Delta \ell$$

Es más, siempre $\Delta \ell = 1$ ya que así varía en la sumatoria!

El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\ell}}{\Delta\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} \Delta\ell$$

con

$$c_{\ell} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t} dt$$

llamemos $\omega = \frac{\pi\ell}{L}$. Entonces, ω varía conforme lo hace ℓ , $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$ (y como $\Delta\ell = 1 \rightarrow \Delta\omega \cdot L = \pi$)

Entonces, usando el cambio de variables

$$f(x) = \sum_{\frac{\ell}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\omega}}{\Delta\omega} e^{i\omega x} \Delta\omega = \sum_{\frac{\ell}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} c_{\omega} \frac{L}{\pi} e^{i\omega x} \Delta\omega$$

Como una suma de Riemann, pasamos a la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega) L}{\pi} e^{i\omega x} d\omega$$

El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega) L}{\pi} e^{i\omega x} d\omega$$

con

$$\frac{c(\omega) L}{\pi} = \frac{L}{\pi} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Lo único que falta es tomar límite para $L \rightarrow \infty$ el cual es necesario incluso para pasar de la suma de Riemann a la integral (ya que si $\Delta\omega \rightarrow 0$ debemos tener $L \rightarrow \infty$ para que el producto de siempre π)

Tomando entonces $\lim_{L \rightarrow \infty}$ tenemos la **integral de Fourier**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

con

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

La Transformada de Fourier

A partir de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

es la llamada **Transformada de Fourier**

Otra formulación es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Llamando $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ y $G(\omega)$ a las transf. de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, podemos demostrar las siguientes propiedades:

- **Producto Interno. Identidad de Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega$$

- **Norma.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- **Convolución.**

$$\mathcal{F}[f * g] = F(\omega) G(\omega)$$

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)

Clase 17

Transformada de Fourier Propiedades y aplicaciones

- Integral de Fourier con Senos y Cosenos
- Funciones Pares e Impares
- Transformada Coseno y Transformada Seno
- Ejemplo y Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

Otra formulación de la serie de Fourier

Escribamos la serie de Fourier, definida para una función periódica en el intervalo $[-L, L]$

$$f(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

En virtud de la paridad de la función coseno, podemos escribir

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ (\ell \neq 0)}}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right]$$

Entonces, podemos escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

Otro tipo de *salto al continuo* (continuación)

A partir de

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

consideremos $\omega = \frac{\pi}{L}\ell$, entonces, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$

De manera análoga a lo hecho para la obtención de la integral de Fourier, y teniendo en cuenta la paridad (con respecto a la variable ω del coseno) podemos llegar a la expresión, tomando el límite al continuo

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(t-x)] dt \right\} d\omega$$

o, asumiendo la convergencia de las integrales impropias

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega \\ &+ \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega \end{aligned}$$

Funciones Pares e Impares. Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

En general, llegamos a

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega \\ + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega$$

Si la **función es par**, la parte correspondiente a la integral de seno se anula, por lo que podemos escribir (usando la paridad)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega$$

Si la **función es impar**, la parte correspondiente a la integral de coseno se anula,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega$$

Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

Si la **función es par**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

donde define la **Transformada Coseno**

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

Si la **función es impar**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

donde define la **Transformada Seno**

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Ejemplo

Hallar la Transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Como la función es par, podemos obtener la transformada coseno, que resulta inmediatamente de calculo directo

$$F_c(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega}$$

Entonces, en virtud de la Integral de Fourier, podemos escribir

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega} \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

A partir del ejemplo anterior

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega} \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Podemos escribir cambiando adecuadamente las variables

$$\int_0^{\infty} \frac{2 \sin(ax)}{\pi x} \cos(bx) dx = \begin{cases} 1 & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

o bien

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

Que nos permite obtener, para $a = 1$ y $b = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)

Clase 18

El Problema de Sturm-Liouville El Caso Homogéneo

- Formulación del problema
- Tipos de Condiciones de Contorno
- Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

El abordaje de las ecuaciones diferenciales que hasta ahora hemos analizado fue en el sentido de **Problema de Valor Inicial** o **Problema de Cauchy**

En virtud de la teoría desarrollada, para una ecuación lineal de segundo orden eran necesarios los valores de la función y de la derivada en un valor inicial.

El **Problema de Sturm-Liouville** será una ecuación diferencial de segundo orden definida en un intervalo cerrado (y que pueda ser escrita en determinada manera), para la cual las condiciones se fijan los valores en los extremos del intervalo, tanto el valor de la función como el de la derivada.

Una ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = \lambda y(x)$$

definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es de Sturm-Liouville si puede escribirse como

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] y(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x)$$

donde las funciones $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en el intervalo

Tipos de Condiciones de Contorno

En general, las condiciones de contorno para el problema de Sturm-Liouville pueden ser de dos tipo:

- Condiciones Locales o Separadas: Son aquellas que fijan valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo
- Condiciones No Locales: Son aquellas que relacionan los valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo

Tipos de Condiciones Locales o Separadas

Los tipos de Condiciones Locales:

- Dirichlet:

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

- Newmann:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Nicoletti:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

Definimos como **Operador de Sturm-Liouville** al operador lineal:

$$L = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$$

Con esta definición, la ecuación diferencial que queremos resolver se puede escribir

$$L[y] = \lambda r(x) y$$

Que es (casi) un problema de autovalores (casi por el factor $r(x)$)

Para el producto interno en $[a, b]$

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

para las condiciones de contorno que hemos definido el **operador** es

Hermítico o **autoadjunto**

El Operador es Autoadjunto

Calculemos

$$\langle L[f]|g \rangle = \int_a^b L[f(t)] g(t) dt = \int_a^b \left[-\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{df(t)}{dt} \right] + q(t) f(t) \right] g(t) dt$$

Calculemos mediante integración por partes la integral

$$-\int_a^b \frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{df(t)}{dt} \right] g(t) dt = -p(t) \frac{df(t)}{dt} g(t) \Big|_a^b + \int_a^b p(t) \frac{df(t)}{dt} \frac{dg(t)}{dt} dt$$

Ahora calculemos por partes la integral

$$\int_a^b p(t) \frac{df(t)}{dt} \frac{dg(t)}{dt} dt = -\int_a^b \frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{dg(t)}{dt} \right] \frac{df(t)}{dt} dt + p(t) \frac{dg(t)}{dt} f(t) \Big|_a^b$$

Volviendo entonces a escribir $\langle L[f]|g \rangle$

$$\langle L[f]|g \rangle = \langle f|L[g] \rangle + p(a) [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)] + p(b) [f'(b)g(b) - f(b)g'(b)]$$

Tanto para condiciones de Dirichlet o Neumann tenemos

$$\langle L[f]|g \rangle = \langle f|L[g] \rangle$$

- Bravo Yuste, Santos: *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*, Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)

Clase 19

El Problema de Sturm-Liouville Desarrollo en Autofunciones

- Propiedades del Operador de Sturm-Liouville
- Teorema de Sturm-Liouville
- Ejemplos de ecuaciones de Sturm-Liouville
- El problema no homogéneo: Función de Green
- Construcción de la Función de Green
- Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Propiedades del Operador de Sturm-Liouville

Como el operador de Sturm-Liouville es Hermítico, tenemos que (repassar Algebra Lineal)

- Los autovalores son reales
- Autofunciones asociadas a distintos autovalores son ortogonales

Desarrollos en Funciones Ortogonales

Como consecuencia de las propiedades en tanto operador Hermítico, cualquier función definida en el intervalo de la ecuación diferencial admitirá un desarrollo análogo al obtenido para el caso de las series de Fourier, en autofunciones del operador

$$L = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$$

Propiedad Espectral del Operador de Sturm-Liouville.

Teorema de Sturm-Liouville

Definición. (*Problema Coercivo*). Un problema de Sturm-Liouville se dice coercivo si existe un $\alpha_0 \in \mathcal{R}$ tal que

$$\langle L[y]|y \rangle \geq \alpha_0 (\|y\| + \|y'\|)^2$$

Asimismo, el problema se llama casi-coercivo si existe un $\mu \in \mathcal{R}$ tal que el operador $L - \mu r(x)$ es coercivo

Teorema. (*Sturm-Liouville*). Dado un problema de Sturm-Liouville regular y casi-coercivo, se tiene:

- El conjunto de autovalores es numerable y ordenado

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \right)$$

- El conjunto de autofunciones es completo, es decir es base.
- Cada autofunción asociada a λ_k posee $k - 1$ ceros en el intervalo de definición del problema

Veamos algunos ejemplos de problemas de Sturm-Liouville

1. Ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_\ell(x) \right] + \ell(\ell + 1) P_\ell(x) = 0$$

2. Ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

Puede escribirse como

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0$$

El problema no homogéneo. La función de Green

Consideremos el problema no homogéneo definido en el intervalo $[a, b]$

$$L[y] = f(x)$$

Para resolver este problema se define la **Función de Green, $G(x, x')$** a través de la relación

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x')$$

la cual satisface las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann o la más general de las condiciones, la de Robin

$$c_a G(a, x') + d_a \frac{\partial G}{\partial x}(a, x') = 0$$

$$c_b G(b, x') + d_b \frac{\partial G}{\partial x}(b, x') = 0$$

La Solución del Problema Inhomogéneo

Teorema.

- i) La solución del problema inhomogéneo existe si y sólo si la única solución del problema homogéneo con las condiciones de contorno de Robin es la solución trivial.
- ii) El en caso del inciso i), la solución del problema inhomogéneo viene dada por

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$$

apliquemosle el operador

$$L[y] = \int_a^b \underbrace{L[G(x, x')]}_{L \text{ actúa en la variable } x} f(x') dx' = \int_a^b \delta(x - x') f(x') dx' = f(x)$$

solución de la ecuación!. Además, satisface las condiciones de contorno (ya que $G(x, x')$ las satisface

1. Existen funciones y_1 e y_2 que satisfacen

$$c_a y_1(a) + d_a y_1'(a) = 0$$

$$c_b y_2(b) + d_b y_2'(b) = 0$$

Esto se cumple, debido al teorema de existencia y unicidad, existen funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, linealmente independientes definidas a través del problema de Cauchy $L[u_1] = 0$ con valores u_1 y u_1' en a y u_2 y u_2' en b

2. Podemos definir $G(x, x')$

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1(x') y_1(x) & a \leq x < x' \\ c_2(x') y_2(x) & x' < x \leq b \end{cases}$$

Esta función satisface $L[G(x, x')] = 0$ (para menores y mayores estrictos de x') y satisface las condiciones de contorno.

Construcción de la Función de Green. *Continuación*

Además, como queremos que sea efectivamente la función de Green, debe satisfacer

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x')$$

Entonces, integrando entre a y b con respecto a x tenemos

$$\int_a^b L[G(x, x')] dx = \int_a^b \delta(x - x') dx = 1$$

$\left(\int_a^b \delta(x - x') dx' = \int_a^b \delta(x - x') dx = 1 \right)$ Separando la integral de la forma $\int_a^b = \int_a^{x'-\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'+\varepsilon}^b$ y dado que la función de Green satisface $L[G(x, x')] = 0$ para x mayor estricto o menor estricto a x' solo debemos calcular la integral

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L[G(x, x')] dx = 1$$

Construcción de la Función de Green. *Continuación*

Aplicando el operador L a $G(x, x')$ e integrando, tenemos

$$-\left[p(x) \frac{G(x, x')}{dx} (x, x') \right]_{x'=x-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x) G(x, x') dx = 1$$

1. Debido a la continuidad de $q(x)$ y si imponemos la continuidad de $G(x, x')$ en $x = x'$ la integral se anula para $\varepsilon \rightarrow 0$
2. Para que el resultado de 1 debemos imponer una discontinuidad en la derivada de G en $x = x'$ cuyo salto sea $-1/p(x')$ es decir, la diferencia de las derivadas laterales sea $-1/p(x')$ (esto implica que la derivada sea la función de Heaviside, más un término continuo)

Entonces, por cómo propusimos la función de Green, $c_1(x')$ y $c_2(x')$ se obtienen a partir de

$$c_2(x') y_2(x') - c_1(x') y_1(x') = 0 \quad (\text{continuidad en } x = x')$$

$$c_2(x') y_2'(x') - c_1(x') y_1'(x') = -\frac{1}{p(x')} \quad (\text{discontinuidad en } x = x')$$

Con las condiciones impuestas, la expresión de la función de Green será

$$G(x, x') = \begin{cases} -\frac{y_1(x)y_2(x')}{p(x')W(x')} & a \leq x < x' \\ -\frac{y_2(x)y_1(x')}{p(x')W(x')} & x' \leq x \leq b \end{cases}$$

donde

$$W(x') = y_1(x')y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Ejemplo. Obtener la función de Green para el problema

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Dada la base de autofunciones, se puede demostrar que la función de Green para el problema de Sturm-Liouville se puede desarrollar

$$G(x, x') = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\ell}} w_{\ell}(x) w_{\ell}(x')$$

Donde las funciones $w_{\ell}(x)$ son **autofunciones** del operador de Sturm-Liouville, **normalizadas**

- Bravo Yuste, Santos: *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*, Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Albo Carlos Cavalheiro, *O Problema de Sturm-Liouville* Minicurso II Colóquio de Matemática da Região Sul. Universidade Estadual de Londrina, Brasil
(<http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.01.pdf>)

Clase 20 y 21

Aplicaciones a la Física Matemática

- Problema de Contorno en el Espacio
- Identidades de Green
- El Laplaciano en Coordenadas Esféricas
- Armónicos Esféricos
- Aplicación a la Teoría del Potencial Gravitatorio
- Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio

Problema de Contorno en el Espacio

1. El problema de Sturm-Liouville puede ser extendido a problemas de contorno en el plano y en el espacio.
2. Las ideas y propiedades relacionadas a la función de Green pueden ser extendidas a \mathcal{R}^2 y \mathcal{R}^3
3. Análogamente a los visto para un problema unidimensional, la solución de un problema inhomogéneo será construída a partir de la función de Green.
4. En un problema espacial, vamos a considerar una superficie cerrada $S = \partial V$ frontera de un volumen V
5. Con este análisis, haremos un estudio del potencial gravitatorio para el caso espacial, teniendo en cuenta volumen acotado y el problema infinito.

Condiciones de Contorno. Las Identidades de Green

Para tratar las condiciones de contorno en el problema del potencial, vamos a considerar un procedimiento desarrollado por **George Green**. Este procedimiento consiste en aplicar el conocido **Teorema de Gauss**

$$\iiint_V \text{Div}(\vec{F}) \, dv = \iint_{\partial V} \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle \, dS$$

donde ∂V es la superficie frontera del volumen V y \vec{n} el vector normal exterior.

Si elegimos dos campos escalares Φ y Ψ de tal manera que definimos el campo \vec{F} a partir de la relación $\vec{F} = \Phi \nabla \Psi$ tenemos que

$$\text{Div}(\Phi \nabla \Psi) = \Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle$$

Reemplazando en la integral, tenemos la **primera identidad de Green**

$$\iiint_V [\Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle] \, dv = \iint_{\partial V} \Phi \langle \nabla \Psi | \vec{n} \rangle \, dS = \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} \, dS$$

Las Identidades de Green (*Continuación*)

Si a partir de la **primera identidad de Green**

$$\iiint_V [\Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle] dv = \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} dS$$

Intercambiamos Φ con Ψ y restamos obtenemos la **segunda identidad de Green**

$$\iiint_V [\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi] dv = \iint_{\partial V} \left[\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right] dS$$

Para aplicar las identidades de Green al problema del potencial, tengamos en cuenta que

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Esta identidad se obtiene directamente a partir de aplicar el Teorema de Gauss

$$\iiint_V \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv = \iiint_V \text{Div} \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv = \iint_{\partial V} \langle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} | \vec{n} \rangle ds = \iint_{\partial V} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] r^2 ds = -4\pi$$

Aplicación de las Identidades de Green. Ecuación de Poisson.

Si aplicamos la segunda identidad de Green en la que para la función Φ sea el potencial gravitatorio y la función

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Además, si consideramos que el potencial gravitatorio debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Tenemos

$$\iiint_V \left[\Phi(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')) - \frac{4\pi G}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') \right] dv' = \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}'} \right\} dS$$

Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}'} \right\} dS$$

La función de Green. Problema de Dirichlet y Neumann

A partir de la propiedad

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

vemos que esta función cumple con la condición fundamental para ser **función de Green**. Más aún, si consideramos una función armónica adicional, también satisface la ecuación, con lo que podemos construir una función de Green de la forma

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\nabla^2 F = 0)$$

Entonces, sustituyendo en la **fórmula de Green** para la función $\Phi(\vec{r})$
Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right\} dS$$

Condición de Dirichlet

De la expresión

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}'} \right\} dS$$

si imponemos la **condición de Dirichlet**

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \vec{r}' \in S$$

la solución será

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} dS$$

Condición de Neumann

Para la imposición de la condición de Neumann, debemos tener cuidado porque poner sencillamente $\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} = 0$ nos podría traer confusión, ya que por aplicación directa del Teorema de Gauss

$$\iint_{\partial V} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} dS = -4\pi$$

Por lo tanto, la condición más sencilla que podemos imponer para el **problema de Neumann** es

$$\frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} = -\frac{4\pi}{S} \quad (\vec{r}' \in S)$$

donde S es el valor del área de la superficie S

Con esto, la solución a la Ecuación de Poisson con la **condición de Neumann** para Φ será, llamando $\langle \Phi \rangle_S$ al valor medio del potencial sobre la superficie

$$\Phi(\vec{r}) = \langle \Phi \rangle_S - G \iiint_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}'} dS$$

El Laplaciano en Coordenadas Esféricas

El Laplaciano de un campo escalar definido en \mathcal{R}^3 , $\Phi(x, y, z)$, es

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Si cambiamos las coordenadas a esféricas

$$x = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\varphi)$$

El Laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi \right]$$

Método de Separación de Variables

Si la función $\Phi(r, \theta, \varphi)$ es separable en la forma

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$$

El Laplaciano toma la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= Y(\theta, \varphi) \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \\ &+ R(r) \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R(r) Y(\theta, \varphi)} \nabla^2 \Phi &= \frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \\ + \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} &\left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

La ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

La **ecuación de Laplace** es $\nabla^2\Phi = 0$

Considerando que las variables son separables en el sentido presentado, tenemos que la ecuación de Laplace en esféricas la podemos escribir

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

o bien

$$\underbrace{-\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right]}_{\text{sólo depende de } r} = \underbrace{\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right]}_{\text{sólo depende de } \theta \text{ y } \varphi}$$

Para que esto ocurra, se debe cumplir

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] = -C$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right] = C$$

La Ecuación Radial

La parte radial de la ecuación es

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + C R = 0 \quad (\text{Ecuación de Euler!!!!})$$

Proponiendo una serie de potencias de $R = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell}$ llegamos a

$$\sum a_{\ell} [\ell(\ell - 1) + 2\ell + C] r^{\ell-2} = 0$$

Entonces, C es

$$C = -\ell(\ell + 1)$$

Entonces, la solución general será

$$\phi = A \frac{1}{r^{\ell+1}} Y + B r^{\ell} Y$$

Con este valor de C vamos a la ecuación para $Y(\theta, \varphi)$

La ecuación en θ y φ

Para la función $Y(\theta, \varphi)$ la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \ell(\ell + 1) Y(\theta, \varphi) = 0$$

Si efectuamos el cambio de coordenadas $\xi = \cos(\varphi)$ tendremos que las derivadas las podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= -\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} &= -\cos(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

La ecuación en θ y φ (continuación)

Reemplazando en la ecuación para los ángulos tenemos

$$\underbrace{(1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \ell(\ell + 1) Y}_{\text{Ecuación de Legendre!}} + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} = 0$$

Si proponemos $Y = Y_1(\xi) e^{im\theta}$ con $m \in \mathcal{Z}$ y reemplazamos en la ecuación, tenemos

$$\left\{ (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] Y_1 \right\} e^{im\theta} = 0$$

que es satisfecha por la función solución de

$$(1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] Y_1 = 0$$

que es la Ecuación Asociada de Legendre

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre

Las funciones P_ℓ^m satisfacen la ecuación diferencial

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_\ell^m(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_\ell^m(\xi)}{d\xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] P_\ell^m(\xi) = 0$$

1. Ortogonalidad. En $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(t) P_{\ell'}^m(t) dt = \begin{cases} 0 & \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} & \ell = \ell' \end{cases}$$

2. Fórmula de Rodrigues. Los $P_\ell^m(\xi)$ se pueden calcular a partir de

$$P_\ell^m(\xi) = (-1)^m (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} [P_\ell(\xi)] = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{d\xi^{\ell+m}} (\xi^2 - 1)^\ell$$

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre (Continuación)

Las condiciones de periodicidad y regularidad en el polo norte y sur de la esfera hacen que el índice ℓ y el orden m necesarios para que se satisfagan deben ser y cumplir: $\ell \geq 0$ y $|m| \leq \ell$, es decir $-\ell \leq m \leq \ell$.

Consideremos los m positivos:

$$P_{\ell}^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} [P_{\ell}(\xi)]$$

Para tomar en cuenta los negativos, tendremos

$$P_{\ell}^{-m}(\xi) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell}^m(\xi) \quad m > 0$$

La parte angular de la solución de la ecuación de Laplace tendrá como expresión

$$P_\ell^m(\xi)e^{im\theta}$$

Si definimos sobre la superficie de una esfera unidad el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} f(\theta, \varphi) g^*(\theta, \varphi) \underbrace{\sin(\varphi) d\varphi d\theta}_{\text{ángulo sólido } d^2\Omega}$$

junto con la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre, tendremos

$$\langle P_\ell^m(\xi)e^{im\theta} | P_{\ell'}^{m'}(\xi)e^{im'\theta} \rangle = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Definición de Armónicos Esféricos

Con todo lo visto, se define los **Armónicos Esféricos**, $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} P_{\ell}^{|m|}(\cos \varphi) e^{im\theta} \times \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución general a la ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$ será, por el principio de superposición

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[A^{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} + B^{\ell m} r^{\ell} \right] Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Tabla para los Primeros de Armónicos Esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

A partir de la definición tenemos

$$\begin{aligned} \ell = 0 : Y_{00} &= \frac{1}{4\pi} \\ \ell = 1 : \begin{cases} Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\varphi) e^{-i\theta} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\varphi) \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\varphi) e^{i\theta} \end{cases} \\ \ell = 2 : \begin{cases} Y_{2,-2} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin^2(\varphi) e^{-2i\theta} \\ Y_{2,-1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{-i\theta} \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left[\frac{3}{2} \cos^2(\varphi) - \frac{1}{2} \right] \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{i\theta} \\ Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\varphi) e^{2i\theta} \end{cases} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Un resultado de gran aplicación en Teoría del Potencial es el denominado **Teorema de Adición de Armónicos Esféricos**. Si dos radios vectores forman entre sí un ángulo γ ($\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle}{|\vec{r}| |\vec{r}'|}$) se tiene

$$P_\ell(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')$$

donde

$$\cos(\gamma) = \cos(\varphi) \cos(\varphi') + \sin(\varphi) \sin(\varphi') \cos(\theta - \theta')$$

Recordemos además que los polinomios de Legendre pueden ser obtenidos a partir de la **función generatriz**

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell$$

La función de Green para la Esfera

Consideremos la función

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}}$$

con $r = |\vec{r}|$, $r' = |\vec{r}'|$

Supongamos que separamos el problema en **interior** ($r < r'$) y **exterior** ($r > r'$)

Para hacer el desarrollo en polinomios de Legendre es necesario distinguir los problemas, ya que el cociente r/r' o r'/r debe ser menor a uno para que sea convergente.

Entonces, para $r > r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + t^2 - 2t \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} \end{aligned}$$

La función de Green para la Esfera (*continuación*)

y para $r < r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r' \sqrt{1 + t^2 - 2t \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} \end{aligned}$$

Sólo resta aplicar ahora el **Teorema de Adición de Armónicos Esféricos** y completamos la descripción en coordenadas esféricas

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Aplicando el teorema de Adición, tenemos

- Para $r' < r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

- Para $r' > r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio. Alcance Infinito

Apliquemos el Teorema de Adición de Armónicos Esféricos al *Problema Gravitatorio* de alcance infinito (entonces con la imposición de que debe ser nulo el potencial en el infinito y el campo ($\nabla\Phi = 0$) en el infinito, la segunda identidad de Green se reduce a

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Ahora, la integral se calcula en todo \mathcal{R}^3

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_0^\infty \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 \sin(\varphi) dr' d\theta' d\varphi'$$

La integral en r' la separamos en $0 \leq r' < r$ y en $r \leq r' < \infty$

Expresión del Desarrollo Multipolar

Realizando la separación de la integral en r' y considerando el teorema de adición de armónicos esféricos (tendiendo en cuenta los valores relativos de r y r') llegamos a la expresión del desarrollo multipolar

$$\Phi(\vec{r}) = -4\pi G \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{2\ell+1} \left\{ \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') r'^{\ell+2} \underbrace{\sin(\varphi') d\varphi d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right. \\ \left. + r^{\ell} \int_r^{\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') r'^{-\ell+1} \underbrace{\sin(\varphi') d\varphi d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right\}$$

- Webster, Arthur G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Dover (1955)
- Jackson, John D. *Electrodinámica Clásica*. Ed. Alhambra. (1966)
- Sobolev, Sergei. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Addison Wesley (1964)