Dinámica No Lineal 2017

Péndulo Simple

1. Representar el espacio de fases del Hamitoniano

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos q$$

mediante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento para 20 valores de $H(p,q) = h$. Considere $\omega_0 = 1, h < 1, h = 1$ y $h > 1$.

2. A partir de la expresion de la frecuencia como función de la energía,

$$\omega(h) = \frac{\pi\omega_0}{2K(k)}, \quad h < \omega_0^2; \qquad \omega(h) = \frac{\pi\omega_r(h)}{2K(k)}, \quad h > \omega_0^2,$$

para oscilaciones y rotaciones respectivamente, con

$$\omega_r(h) = \sqrt{\frac{h + \omega_0^2}{2}},$$

$K(k)$ la integral elíptica completa de primera especie y

$$k = \sqrt{\frac{h + \omega_0^2}{2\omega_0^2}}, \quad h < \omega_0^2; \qquad k = \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{h + \omega_0^2}}, \quad h > \omega_0^2,$$

graficar ω en función de h tomando $\omega_0 = 1$.

3. Repetir el ejercicio anterior para $h \in (0.90, 1.01)$ considerando ~ 100 valores de h en dicho intervalo.

4. Comparar el resultado del ejercicio anterior con lo que se obtiene de utilizar la expresión asintótica para la frecuencia en la vecindad de la separatiz:

$$\omega(w) = \frac{\pi\omega_0}{\ln\frac{32}{|w|}}, \qquad w = \frac{h-\omega_0^2}{\omega_0^2}, \qquad |w| \ll 1.$$

5. Hallar los puntos fijos del Hamiltoniano del péndulo y estudiar su estabilidad lineal. Graficar cualitativamente el espacio de fases del sistema.