

Dinámica No Lineal 2017

Perturbaciones al péndulo–Mapa de la Separatriz–Caracterización del caos

1. Estudiar el Mapa de la Separatriz:

$$\bar{w} = w + W \sin \tau_0, \quad \bar{\tau}_0 = \tau_0 + \lambda \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad \tau_0 \bmod 2\pi,$$

para los siguientes valores de los parámetros: $\lambda = 8, W = 10^{-10}$, y graficar en el plano $\tau_0, s = w/W$ para $n \sim 10^6$ para varias condiciones iniciales.

2. Mostrar que el Mapa de la Separatriz es canónico.
3. Iterar el mapa de la separatriz para dos trayectorias muy próximas γ y γ' con condiciones iniciales, $|w(0) - w'(0)| \approx |\tau_0(0) - \tau'_0(0)| \approx 10^{-7}$, y evaluar

$$\delta(n) = \sqrt{(w(n) - w'(n))^2 + (\tau_0(n) - \tau'_0(n))^2},$$

para $1 \leq n \leq N$ con $N = 10^3$. Considere condiciones iniciales para γ y γ' tanto en la región caótica como dentro de una isla de estabilidad. Graficar $\delta(n)$ en función de n y discutir.

Sugerencia: Iterar “dos mapas de la separatriz” en forma simultánea para las diferentes condiciones iniciales y evaluar la diferencia $\delta(n)$ para cada iteración.

4. Repetir el cálculo del ejercicio anterior pero para el mapa standard con $K = 2$ tomando también órbitas tanto en regiones caóticas como regulares.
5. Linealizar el mapa standard alrededor de una trayectoria arbitraria, $\gamma: I(n), \theta(n)$, haciendo $I \rightarrow I + \eta, \theta \rightarrow \theta + \xi$ con $\eta, \xi \ll 1$, y obtener el mapa tangente para ξ, η .

6. Resolver simultáneamente el mapa standard y el mapa tangente para una trayectoria regular y otra caótica considerando $\eta_0 = \xi_0 = 10^{-7}$ y calcular

$$\delta(n) = \sqrt{\eta^2(n) + \xi^2(n)},$$

en función de n , con $1 \leq n \leq N = 10^3$ para ambas trayectorias. Graficar $\delta(n)$ en función de n y discutir la diferencia de la evolución de $\delta(n)$ entre ambas trayectorias.

7. Utilizando el cómputo del ejercicio anterior, calcular el *máximo exponente de Lyapunov*

$$\sigma(\gamma, \gamma', n) \approx \frac{1}{n} \ln \frac{\delta(n)}{\delta(0)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

y graficar en función de n para ambas trayectorias. A que tiende σ para una trayectoria regular y para una caótica? Discutir la diferencia entre calcular $\delta(n)$ utilizando la diferencia de dos trayectorias próximas y utilizando el mapa tangente.

Sugerencia: Hacer este cálculo en forma conjunta con el ejercicio anterior.