Dinámica No Lineal

Práctica 3

Oscilador Cuártico

2022

El oscilado cuártico está definido por el Hamiltoniano

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \qquad p, x \in \mathbb{R},$$

y admite como solución:

$$x(t) = x_0(h) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left((2n-1)\sqrt{2}\beta h^{1/4} t\right),$$

donde

$$x_0 = 4\beta h^{1/4}, \qquad \beta = \frac{\pi}{2\mathrm{K}(1/\sqrt{2})}, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\cosh((n-1/2)\pi)},$$

y h es la energía del oscilador.

1. (a) A partir del potencial del oscilador cuártico, identificar el o los regímenes de movimiento para distintos valores de h.
   (b) Escribir las ecuaciones de Hamilton del oscilador cuártico.
   (c) Encontrar el o los puntos fijos de $H(p, x)$ y determinar su estabilidad.
2. (a) A partir de los resultados anteriores, graficar esquemáticamente el espacio de fases del oscilador cuártico para diferentes valores de h.
   (b) Graficar el espacio de fases mediante la integración numérica de las ecuaciones de Hamilton.
   Sugerencia: utilizar como referencia el programa `Cuartico.py`.
3. (a) Mostrar que los coeficientes α_n decaen de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \approx e^{-\pi} \approx \frac{1}{23}.$$

(b) Justificar que la solución a primer orden se puede escribir como:

$$x(t) \approx a(h)\cos(\omega(h)t) = a(h)\cos\theta, \qquad \theta \in \mathbb{S}^1$$

donde $a(h)$ es la *amplitud de oscilación*, θ es la variable ángulo conjugada a la acción I y

$$\omega(h) = \sqrt{2}\beta h^{1/4}$$

es la frecuencia de oscilación.

(c) Discutir las semejanzas y diferencias con el oscilador armónico y el péndulo.

(d) Estimar el valor numérico de β y α_1.
Sugerencia: Importar en Python el paquete `special` de `scipy` y utilizar la función `ellipk`.

4. (a) A partir de la expresión de la frecuencia:

$$\dot{\theta} = \omega(h) = \frac{dh}{dI},$$

mostrar que el Hamiltoniano se puede escribir en términos de la acción como

$$H(I) = AI^{4/3}, \qquad A = \left(\frac{3\beta}{4\sqrt{2}}\right)^{4/3}.$$

(b) Estimar el valor numérico de A.

(c) Hallar la expresión de la frecuencia en función de la acción $\omega(I)$.

(d) Calcular el parámetro de no linealidad α, definido como

$$\alpha = \frac{I}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}I}.$$

5. Guardar los resultados para la práctica 5.