Dinámica No Lineal

Resonancias multidimensionales

1. Sea el Hamiltoniano:

$$H(p_1, p_2, x_1, x_2) = H_0(p_1, p_2, x_1, x_2) + \epsilon V(x_1, x_2), \qquad 0 < \epsilon \ll 1,$$

donde

$$H_0(p_1, p_2, x_1, x_2) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4}, \qquad V(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

a) Llevar H_0 a la forma $H_0(I_1, I_2)$ donde I_1, I_2 son las acciones correspondientes a H_0.

b) Utilizando que

$$x_i(I_i, \theta_i) \approx a(I_i) \cos\theta_i,$$

y que la frecuencia del oscilador es

$$\omega(I_i) = \beta a(I_i) = \sqrt{2}\beta h_i^{1/4},$$

con $\beta \approx 0.8472$ y donde h_i es la energía correspondiente al grado de libertad i siendo θ_i la fase conjugada a la acción I_i, llevar el Hamiltoniano a la forma

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon V(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2).$$

c) Considerando condiciones iniciales tales que $\omega_1 - \omega_2 \approx 0$, qué valor de la acción $\mathbf{I}^r$ satisface esta condición de resonancia?

Reducir H al Hamiltoniano resonante, hallar el ancho de la resonancia en el espacio de acciones y de frecuencias.

d) Graficar esquemáticamente en el espacio de acciones y de frecuencias, para algún valor $H_0 = h > 1$, las superficies de energía y resonantes, el vector de frecuencia en la resonancia, el vector resonante y el ancho de la resonancia.

2. Extendiendo a 3D el Hamiltoniano anterior:

   $$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{p_3^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^4}{4}, \quad V(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3).$$

   a) Escribir H_0 en función de las acciones I_1, I_2, I_3.

   b) Utilizando la misma aproximación que en el ejercicio anterior, escribir el Hamitoniano en términos de las variables ángulo acción.

   c) Que resonacias a *primer orden*, esto es orden ϵ, tiene el sistema?

   d) Elija una resonancia cualquiera y grafique esquemáticamente en el espacio de acciones y de frecuencias, para algún valor $H_0 = h > 1$, las superficies de energía y resonantes, el vector de frecuencia $\boldsymbol{\omega}^r$ para algún vector de acción resonante, el vector resonante $\boldsymbol{m}$, el vector $\boldsymbol{e}$ normal a $\boldsymbol{\omega}^r$ y a la superficie resonante, y el ancho de la resonancia. Discuta las diferencias entre el Hamiltoniano 2D y 3D.

3. Considere el Hamiltoniano 3D del ejercicio anterior y tomando condiciones iniciales "lejos" de cualquier resonancia de primer orden

   a) Efectuar una transformacin canónica para llevar la perturbaicón a orden ϵ^2.

   b) Qué resonancias posee el sistema a segundo orden?

   c) Qué puede decir del acoplamiento entre los grados de libertad del problema?