Dinámica No Lineal

Mapa Standard

1. a) Mostrar que el Mapa Standard (MS), $(\overline{I}, \overline{\theta}) = T(I, \theta)$, con $I \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{S}^1$ y definido por

$$\begin{aligned} \overline{I} &= I + K \sin\theta, \\ \overline{\theta} &= \theta + \overline{I} = \theta + I + K \sin\theta, \end{aligned}$$

   es canónico.

   b) Mostrar que posee las siguientes simetrías:

   $T(I, \theta + 2m\pi) = T(I, \theta)$, $m \in \mathbb{Z}$;

   $T(I + 2n\pi, \theta) = T(I, \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$;

   $T(-I, -\theta) = T(I, \theta)$.

   En base a estas simetrías, justificar que el MS puede restringirse al espacio $\mathcal{S} = \{(I, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq I \leq \pi\}$.

   c)Encontrar los puntos fijos del mapa.

2. A partir del Hamiltoniano asociado al MS,

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt),$$

   donde $J = I/2\pi \in \mathbb{R}$, $\theta, t \in \mathbb{S}^1$ y $k = K/4\pi^2$;

   a) Encontrar las resonancias a orden K y determinar sus amplitudes.

   b) A partir del criterio de *overlap* para estas resonancias, estimar un valor crítico para K, K_c, tal que para $K > K_c$ el movimiento es mayoritariamente inestable, caótico.

   c) Haciendo una transformación canónica para eliminar los términos de orden k en el Hamiltoniano y considerando condiciones iniciales "lejos" de las resonancias enteras, $J^r = n$, encontrar las resonancias a orden k^2.

Sugerencia: utilice una transformación canónica: $(J, \theta) \to (J_1, \theta_1)$, definida por una función generatriz de la forma:

$$F(J_1, \theta) = J_1\theta + k\phi(J_1, \theta),$$

donde ϕ es una función a determinar de manera tal que permita eliminar los términos de orden k.

d) Graficar esquemáticamente en el plano (J, θ) las resonancias que aparecen a orden K y K^2. Que puede decir del resultado obtenido en el apartado b)?

3. Estudiar numéricamente el MS reducido:

$$\overline{y} = y + \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi x, \qquad \overline{x} = x + \overline{y}, \qquad x, y \bmod 1,$$

para $0 < K \leq 5$ y tomando 200 condiciones iniciales a lo largo del eje $y\,(x = 0)$, con $0 \leq y < 1$. Graficar en el plano (x, y) para $N = 10^6$ iterados en cada caso y analizar los diferentes resultados en base al criterio de *overlap*. Discutir los resultados alrededor de $K = 1$ y $K = 4$.

4. Repetir el ejercicio anterior pero tomando condiciones iniciales a lo largo del eje $x = 0.5$.

5. Considerar $K = 10$, una única condición inicial $(x_0, y_0) \approx (10^{-4}, 10^{-4})$ y $N_0 \approx 10^7$ iterados. Discutir el resultado obtenido comparando con lo que se obtiene iterando n condiciones iniciales a lo largo del eje y para el mismo valor de x_0 cuando el número de iterados, N, satisface $Nn \approx N_0$.