Dinámica No Lineal

Perturbaciones al péndulo–Mapa de la Separatriz–Caracterización del caos

1. Mostrar que el mapa de la separatriz o *Whisker mapping* (WM)

$$\overline{w} = w + W \sin \tau_0, \qquad \overline{\tau}_0 = \tau_0 + \lambda \ln \frac{32}{|\overline{w}|}, \qquad w \in \mathbb{R}, \ \tau_0 \bmod 2\pi,$$

   con $W < 0$ y $\lambda > 0$ parámetros constantes, es canónico.

2. Reducir el WM a la forma

$$\overline{s} = s - \sin t, \qquad \overline{t} = t - \lambda \ln |\overline{s}| + G, \tag{1}$$

   con $s = w/|W|$, $t \equiv \tau_0$ y $G = \lambda \ln(32/|W|)$.

3. Calcular el WM en la forma (1) con $-\pi < t < \pi$ para los siguientes valores de los parámetros: $\lambda = 8, W = 10^{-10}$ y graficar en el plano $(t,\, s)$ para $N \sim 10^6$ iterados y varias condiciones iniciales.

   Sugerencia: el primer cómputo hacerlo para valores iniciales $t = 0, s \ll 1$.

4. Repetir el ejercicio anterior para una única condición inicial $t = 0$, $s \ll 1$ y variando λ tal que $2 \leq \lambda \leq 20$. Comparar los distintos resultados.

5. Iterar el mapa de la separatriz para dos trayectorias muy próximas γ y γ' con $\lambda = 10, W = 10^{-10}$ y condiciones iniciales, $|s(0) - s'(0)| \approx |t(0) - t'(0)| \approx 10^{-9}$, y evaluar

$$\delta(n) = \sqrt{(s(n) - s'(n))^2 + (t(n) - t'(n))^2},$$

   para $1 \leq n \leq N$ con $N = 2 \times 10^3$. Considere condiciones iniciales para γ y γ' tanto en la región caótica como dentro de una isla de estabilidad. Graficar $\delta(n)$ en función de n y discutir.

Sugerencia: Iterar "dos mapas de la separatriz" en forma simultánea para las diferentes condiciones iniciales y evaluar la diferencia $\delta(n)$ para cada ietarción. Para condiciones iniciales en una región caótica utilizar $t = 0, s = 10^{-8}$ y para una región regular, remitirse a los resultados del ejercicio anterior.

6. Repetir el cálculo del ejercicio anterior pero para el mapa standard

$$\overline{p} = p + k\sin(2\pi t), \qquad \overline{t} = t + \overline{p}, \qquad p, t \bmod 1$$

donde $k = K/2\pi$, utilizando $K = 1.5$ y $N = 200$ iterados tomando también condiciones iniciales en regiones caóticas y estables.

7. Linealizar el mapa standard alrededor de una trayectoria arbitraria, $\gamma = \{(p(n), t(n)) : p(0) = p_0, t(0) = t_0\}$, haciendo $p \to p + \eta$, $t \to t + \xi$ con $|\eta|, |\xi| \ll 1$, y obtener el mapa tangente para ξ, η:

$$\overline{\eta} = \eta + (K\cos(2\pi t))\xi, \qquad \overline{\xi} = \xi + \overline{\eta}.$$

8. Resolver simultáneamente el mapa standard y su mapa tangente para una trayectoria regular y otra caótica considerando $\eta_0 = \xi_0 = 10^{-9}$ y calcular

$$\delta(n) = \sqrt{\eta^2(n) + \xi^2(n)},$$

en función de n, con $1 \leq n \leq N = 200$ para ambas trayectorias. Graficar $\delta(n)$ en función de n y discutir la diferencia de la evolución de $\delta(n)$ entre ambas trayectorias.

9. Utilizando el cómputo del ejercicio anterior, calcular el *máximo exponente de Lyapunov* (a tiempo finito)

$$\sigma(\gamma, n) \approx \frac{1}{n}\ln\frac{\delta(n)}{\delta(0)}, \qquad 1 \leq n \leq N,$$

y graficar en función de n para ambas trayectorias. A que tiende σ para una trayectoria regular? Y para una caótica? Discutir la diferencia entre calcular $\delta(n)$ utilizando la diferencia entre dos trayectorias próximas y mediante el mapa tangente.

Sugerencia: Hacer este cálculo en forma conjunta con el ejercicio anterior.

10. Calcular el *máximo exponente de Lyapunov* (a tiempo finito) pero utilizando el método descripto en el Capítulo 11 de las Notas de Teoría. Comparar con el resultado del ejercicio anterior y discutir.