DINAMICA NO LINEAL
Lineamientos para la práctica 1

1 Dinámica No Lineal

1.1 Trabajos Prácticos: Revisión de la formulación Hamiltoniana

Ejercicio 1: Ilustrar la naturaleza de las transformaciones canónicas y el rol de la función generatriz.

Dada la función generatriz $F_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\tan Q}$, con m y ω constantes, aplicar la transformación canónica al oscilador armónico:

$$H = p^2/2m + kq^2/2,$$

con $\omega^2 = k/m$.

Notar que el nuevo Hamiltoniano es cíclico en la coordenada, permitiendo la integración inmediata del sistema, llegando a la solución conocida: $q = \sqrt{2E/m\omega^2}\sin(\omega t + \alpha)$, E energía constante.

Resolución Ejercicio 1: El Hamiltoniano es

$$H = p^2/2m + kq^2/2,$$

donde p es el impulso y q es la coordenada canónica conjugada. La función generatriz F_1 es función de las coordenada original q y la nueva coordenada Q, luego las relaciones entre variables es

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$$
$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

Utilizando estas expresiones podemos encontrar $p(P, Q), q(P, Q)$ que reemplazadas en el Hamiltoniano del oscilador armónico nos permitirá encontrar éste en función de las nuevas variables, $\bar{H}(P, Q) = \omega P$.

A partir de las ecuaciones de Hamilton para $\bar{H}$,

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \omega,$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0,$$

es inmediato que

$$\begin{aligned} Q &= \omega t + \alpha, \\ P &= cte. \end{aligned}$$

con α una constante que se determina a partir de las condiciones iniciales del problema. Utilizar las transformaciones entre variables nuevas y viejas para hallar la solución $q(t)$ para una energía $H = \bar{H} = E$ determinada.

Ejercicio 2: Ejemplo de aplicación de la técnica de Hamilton-Jacobi para obtener el movimiento de sistemas mecánicos.

Aplicar el método de Hamilton-Jacobi para resolver el problema del oscilador armónico

Resolución Ejercicio 2: El Hamiltoniano del oscilador armónico es

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2,$$

y la ecuación de Hamilton-Jacobi tiene la forma:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

por lo que de ambas ecuaciones resulta

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Para poder hallar una solución completa, intentamos a través del método de separación de variables, por lo que escribimos para S

$$S(q, t) = W(q) + T(t),$$

donde W, T sólo son funciones de q y t respectivamente. Por tanto, las derivadas parciales de S que intervienen en la ecuación de Hamilton-Jacobi resultan ser derivadas totales de las funciones W y T

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

y asi podemos reescribir la ecuación de Hamilton-Jacobi como:

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2}_{\text{sólo depende de } q} = \underbrace{-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}_{\text{sólo depende de } t}$$

Aquí existe un primer miembro que sólo depende de q y es igual a otro que depende sólo de t, por lo tanto cada uno de los miembros debe ser igual a una constante que llamamos α, y así obtendremos dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Resolver entonces la parte temporal y espacial para encontrar $S(q,t)$, que tendrá la forma

$$S(q,t) = -\alpha t + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha - \frac{m\omega^2}{2} q^2} \mathrm{d}q.$$

De esta expresión para S vamos a obtener nuevas coordenadas que llamaremos β,

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}.$$

Mostrar que, introduciendo el cambio de variables

$$\sin x = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \omega q,$$

la solución para la nueva coordenada es

$$\beta = -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}} q \right),$$

y por lo tanto

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \left(\omega (t + \beta) \right).$$

Recordando que la función característica S es la función generatriz de una transformación canónica donde las nuevas coordenadas e impulsos son constantes, podemos identificar las constantes α como β como

$$\alpha = E,$$
$$\beta = -t_0,$$

donde E es la energía del oscilador y t_0 el instante inicial. Justificar estas identificaciones

Ejercicio 3: Ejemplo de resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi por separación de variables.

Resolver utilizando el método de separación de variables, la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento de una partícula en un plano bajo la acción de una fuerza central:

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}(p_r^2 + p_\phi^2/r^2) + V(r),$$

y obtener la ecuación de la órbita.

Resolución Ejercicio 3: El esquema para resolver este ejercicio es similar al anterior pero trabajando con un sistema de dos grados de libertad:

$$q = (r, \phi),$$
$$p = (p_r, p_\phi).$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi resulta entonces

$$
\begin{aligned}
H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \\
\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right) + V(r) = -\frac{\partial S}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Utilizar el método de separación de variables y recordar que la solución temporal será de la forma $T(t) = -\alpha t = Et$ de acuerdo al ejercicio anterior.

La función principal de Hamilton S resulta

$$
S = -Et + \sqrt{-2m\alpha_2}\phi + \sqrt{2m}\int\sqrt{\frac{\alpha_2}{r^2} - (V(r) - E)}\mathrm{d}r,
$$

con α_2 la constante de separación entre los grados de libertad. Por tanto las nuevas coordenadas, $\beta_E, \beta_{\alpha_2}$ estarán definidas a partir de la función S por medio de las relaciones

$$
\begin{aligned}
\beta_E &= \frac{\partial S}{\partial E} \\
\beta_{\alpha_2} &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned}
$$

Dado que las nuevas coordenadas también serán constantes (por la propia formulación que hemos hecho al plantear la ecuación de Hamilton-Jacobi), podemos renombrar $\beta_E = t_0$ y la solución formal resulta

$$
\begin{aligned}
t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}}\int\left(\frac{\alpha_2}{r^2} - (V(r) - E)\right)^{-1/2}\mathrm{d}r, \\
\beta_{\alpha_2} &= -\sqrt{-\frac{m}{2\alpha_2}}\phi + \sqrt{\frac{m}{2}}\int\left(\frac{\alpha_2}{r^2} - (V(r) - E)\right)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}
\end{aligned}
$$

Para poder resolver un problema específico, el potencial $V(r)$ debe ser especificado, no obstante la segunda de estas ecuaciones es una relación entre las coordenadas originales del problema (r, ϕ), dado que β_{α_2} será una constante. Esta relación se conoce como ecuación de la órbita (o trayectoria).

Ejercicio 4: Ilustración del empleo de variables ángulo-acción para obtener las frecuencias de movimientos periódicos sin hallar la solución completa para el movimiento del sistema.

Utilizando variables ángulo-acción, hallar la frecuencia de un oscilador armónico lineal.

Resolución Ejercicio 4: Debemos tener presente que en un sistema hamiltoniano de un grado de libertad podemos tener dos clases diferentes de movimiento periódico: rotación y oscilación o libración.

En la rotación, la coordenada q puede crecer sin límite como función del tiempo, es decir no estará acotada, que por ser periódico el movimiento, puede reducirse al intervalo $(-\pi, \pi)$ con un simple cambio de variables. En la libración la coordenada q se mantiene siempre acotada para cualquier instante de tiempo, siendo también un movimiento periódico y que un cambio similar de variables dará lugar a un movimiento restringido a un subintervalo de $(-\pi, \pi)$.

El Hamiltoniano del oscilador armónico es:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2}$$

La acción J está definida como:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, \mathrm{d}q,$$

donde la integral debe hacerse sobre un período completo del sistema, que en este caso en particular es un período de oscilación. Dado que el Hamiltoniano es autónomo,

$$H(p,q) = \alpha_1 = E.$$

Expresando p en función de q de la ecuación anterior se puede evaluar la integral que define a la acción. Utilizando el cambio de variables $q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin x$, y recordando que el movimiento en q es periódico entre $-q_0$ y q_0, siendo q_0 la amplitud de oscilación, se obtiene

$$J = E\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

El Hamiltoniano se puede escribir como función de nuevas variables, la acción J y un ángulo θ a través de una transformación canónica:

$$W = W(q,J) = F_2(q,J),$$

siendo W una función generatriz de tipo 2 que depende de los nuevos impulsos (las acciones J) y las viejas coordenadas q. El Hamiltoniano lo escribimos entonces como

$$H = E = J\sqrt{\frac{k}{m}},$$

y es independiente de θ, por lo que la frecuencia del movimiento es

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

que ya conocemos.